А. Д. Блинков
Ю. А. Блинков

Геометрические ЗАДАЧИ на построение

Школьные
Математические
Кружки

А. Д. Блинков, Ю. А. Блинков

Геометрические задачи на построение

Издание второе, стереотипное

Издательство МЦНМО
Москва, 2012

УДК 51(07)
ББК 22.1
Б69

Блинков А. Д., Блинков Ю. А.

Б69 Геометрические задачи на построение.— 2-е изд., стереот. — М.: МЦНМО, 2012.— 152 с.: ил.

ISBN 978-5-4439-0025-4

Четвёртая книжка серии «Школьные математические кружки» посвящена геометрическим задачам на построение и предназначена для занятий со школьниками 7–9 классов. В неё вошли разработки девяти занятий математического кружка с подробно разобранными примерами различной сложности, задачами для самостоятельного решения и методическими указаниями для учителя. Приведён также большой список дополнительных задач. Большинство задач, рассмотренных в книжке, являются классическими для этого раздела геометрии.

В приложениях содержатся исторические сведения, а также рассматриваются некоторые вопросы повышенной трудности, связанные с геометрическими задачами на построение.

Для удобства использования заключительная часть книжки сделана в виде раздаточных материалов. Книжка адресована школьным учителям математики и руководителям математических кружков. Надеемся, что она будет интересна школьникам и их родителям, студентам педагогических вузов, а также всем любителям геометрии.

Первое издание книги вышло в 2010 г.

Александр Давидович Блинков, Юрий Александрович Блинков

Геометрические задачи на построение

Серия «ШКОЛЬНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ КРУЖКИ»

Технический редактор *Е. С. Горская*

Лицензия ИД № 01335 от 24.03.2000 г. Подписано в печать 1.06.2012 г.
Формат $60 \times 88\ {}^1/_{16}$. Бумага офсетная. Печать офсетная. Объем $9\ {}^1/_2$ печ. л.
Тираж 2000 экз.

Издательство Московского центра непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (499)-241-74-83.

Отпечатано с готовых диапозитивов в ООО «Принт Сервис Групп».
105187, Москва, ул. Борисовская, д. 14.

ISBN 978-5-4439-0025-4

Предисловие

Предлагаемая книжка содержит девять тематических занятий математического кружка. В материалы каждого занятия входят: вступительный и поясняющий текст учителя, включающий в себя несколько подробно разобранных типовых задач по теме; задачи, которые могут быть предложены учащимся для самостоятельного решения (как на занятии, так и дома); подробные решения этих задач; методические комментарии для учителя.

Кроме того, отдельно представлен обширный список задач на построение различного уровня трудности (наиболее сложные из них отмечены знаком *), которые можно использовать на усмотрение учителя (или обучающегося). Для этих задач приведены, как правило, краткие указания к решениям, иногда — краткие или полные решения. Для удобства в конце каждого занятия приведён список задач этого раздела, которые имеет смысл использовать для закрепления материала, контроля освоения и углубления. Следует учесть, что ряд задач отнесены к нескольким занятиям (поскольку допускают различные способы решения), а некоторые задачи не вошли в эти списки.

В приложении приведён ряд исторических сведений, а также некоторые вопросы повышенной трудности, связанные с геометрическими задачами на построение. В конце книги приведён список литературы, на которую делаются ссылки в тексте. Большую часть этих изданий и публикаций можно использовать в качестве дополнительной литературы.

Поскольку, на наш взгляд, в последние годы культура решения задач на построение в рамках освоения школьного курса геометрии в значительной степени утеряна, то изначально имеет смысл договориться о терминологии.

Что такое геометрическая задача на построение и что значит её решить?

Задача на построение — это задача, в которой требуется построить геометрический объект, пользуясь только двумя инструментами: циркулем и линейкой (односторонней и без делений).

Решение таких задач состоит не в том, чтобы проделать «руками» соответствующие построения, а в том, чтобы найти **алгоритм решения**, то есть описать решение задачи в виде последовательности уже известных стандартных построений.

В этом смысле решение задач на построение хорошо иллюстрирует один из основных принципов решения любых математических задач: решить задачу — это значит свести её к какой-либо задаче, уже решённой ранее!

Какие построения циркулем и линейкой считать стандартными?

Это вопрос предварительной договорённости. На наш взгляд, к стандартным построениям можно отнести следующие:

1) построение прямой, проходящей через две заданные точки;

2) построение окружности с данным центром и данным радиусом;

3) построение отрезка, равного данному;

4) построение угла, равного данному;

5) построение середины отрезка (серединного перпендикуляра к отрезку);

6) построение биссектрисы угла;

7) построение перпендикуляра к прямой, проходящего через заданную точку (*два случая*).

На основе стандартных построений легко осуществляется построение треугольников **по трём основным элементам**:

1) двум сторонам и углу;

2) стороне и двум углам;

3) трём сторонам.

При этом очень важно донести до сознания учащихся, что все **линейные элементы** в условиях задач заданы в виде **отрезков** (а не их длин), а все угловые — в виде **углов** (а не чисел, выражающих их величину)!

К тем же стандартным построениям сводятся также построения равнобедренных и прямоугольных треугольников по их основным элементам, а также построение прямой, параллельной данной и проходящей через заданную точку. Так как эти задачи (наряду со стандартными построениями) рассматриваются во всех основных школьных учебниках (см., например, [2] и [11]), то их решения мы разбирать не будем.

Таким образом, можно провести некоторую аналогию между решением задач на построение и строительством домов: стандартные построения — это «кирпичи», задачи на построение различных видов треугольников по их основным элементам — «блоки».

Теперь, пользуясь этими «блоками», мы сможем решить большинство задач на построение треугольников, в которых могут быть заданы не только основные, но и **вспомогательные элементы**. Задачи, которые мы научимся решать, станут, образно говоря, «панелями», которые можно будет затем в готовом виде использовать для решения более сложных задач, в которых строятся не только треугольники.

Отметим, что для того чтобы научиться решать задачи на построение (впрочем, как и другие геометрические задачи) очень важно осознать, что решать их надо **с конца**, то есть не пытаться строить всё, что умеешь, наугад, а представить себе, что искомый объект уже построен и, исходя из этого, восстановить цепочку возможных построений.

В заключение заметим, что эффективность освоения методов решения задач на построение, предлагаемых нами, во многом зависит от учёта особенностей реального школьного курса геометрии, изучаемого школьниками, и от учебника, который при этом используется в качестве базового. Подробное изучение методов решения задач на построение позволяет заодно повторить практически все разделы школьной планиметрии, а во многих случаях и существенно углубить свои знания.

В большинстве случаев занятия 1 и 2 целесообразно проводить, на наш взгляд, не ранее второго полугодия 7 класса. В материалах этих занятий сознательно делается акцент на поиски алгоритмов построений, а вопросы исследования (количество решений задачи) остаются за их рамками. Занятия 3 и 4 имеет смысл проводить не ранее первого полугодия 8 класса. В рамках этих занятий учащимся напоминаются все этапы решения задачи на построение, но основной акцент по-прежнему имеет смысл делать на поиски алгоритмов решений. Занятия 5 и 6 проводятся после изучения школьниками в курсе геометрии темы «Движения», то есть не ранее конца второго полугодия 8 класса (а может быть, и позже). Занятия 7–9 адресованы, по всей видимости, девятиклассникам или учащимся старшей школы.

Естественно, что преподаватель математического кружка может по своему усмотрению использовать только часть предложенных занятий, поменять порядок их изучения и т. д.

Авторы благодарны А. В. Шаповалову за подробные обсуждения, способствовавшие существенному улучшению текста, Д. В. Прокопенко и Д. Э. Шнолю — за внимательное прочтение текста и ценные замечания, и Е. С. Горской — за выполнение чертежей.

Занятие 1

Метод вспомогательного треугольника

На этом занятии мы рассмотрим *решение задач на построение треугольников* по их различным элементам, как основным, так и вспомогательным.

К вспомогательным элементам треугольника чаще всего относятся: медианы, высоты, биссектрисы, периметр, радиусы описанной и вписанной окружностей. Иногда рассматривают также сумму (разность) двух сторон или двух углов.

В большинстве случаев такие задачи решаются **методом вспомогательного треугольника**. Суть данного метода — свести решаемую задачу к уже известной задаче на построение треугольника по основным элементам или к уже решённой задаче на построение треугольника.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Постройте остроугольный равнобедренный треугольник по боковой стороне и проведённой к ней высоте.

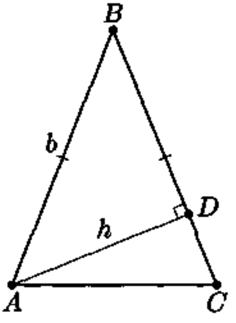


Рис. 1

Решение. Пусть искомый треугольник ABC по заданным стороне b и высоте h уже построен (см. рис. 1). Тогда на нашем чертеже образовался прямоугольный треугольник ABD, у которого заданы катет и гипотенуза. Поэтому задача сводится к построению **вспомогательного прямоугольного треугольника** ABD по катету и гипотенузе и к построению на его основе искомого треугольника (продолжим катет BD так, чтобы длина отрезка BC была равна $b\ldots$).

Обратите внимание на то, что при изложении решения мы говорим только **об алгоритме построения**, складывая его из основного «блока» и дополнительных «кирпичей»!

Отметим, что если не требовать, чтобы искомый треугольник был остроугольным, то задача будет иметь два решения. С нашей точки зрения разбирать этот вопрос сейчас преждевременно.

Рассмотрим более сложную задачу.

Пример 2. Постройте треугольник по двум его углам и периметру.

Отметим ещё раз, что периметр треугольника задан в виде отрезка.

Решение. Пусть искомый треугольник ABC с данным периметром P и углами α и β при вершинах A и B соответственно — построен. «Развернём» его, то есть на прямой AB отложим отрезок AD, равный AC, и отрезок BE, равный BC. Полученные точки D и E соединим с точкой C (см. рис. 2).

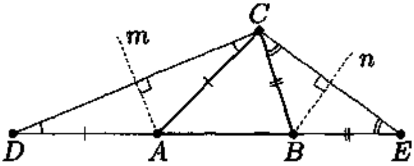


Рис. 2

Заметим, что треугольник ACD — равнобедренный, угол CAB — внешний для этого треугольника, поэтому $\angle CDA = \angle DCA = \frac{\alpha}{2}$. Аналогично $\angle CEB = \angle ECB = \frac{\beta}{2}$.

Таким образом, задача сводится к построению **вспомогательного треугольника** CDE по стороне и двум прилежащим к ней углам ($DE = P$, $\angle CDE = \frac{\alpha}{2}$, $\angle CED = \frac{\beta}{2}$). Для того чтобы теперь получить вершины A и B искомого треугольника, достаточно, например, провести серединные перпендикуляры m и n к отрезкам CD и CE соответственно.

Отличие этой задачи от предыдущей — **вспомогательного треугольника** не было, но мы его создали дополнительным построением.

Отметим, что в подавляющем большинстве случаев, когда задана сумма (или разность) каких-либо отрезков, полезно сделать дополнительное построение, в результате которого заданный отрезок появляется на чертеже. Такой метод иногда называют «спрямлением» (и он применяется не только в задачах на построение).

Подчеркнём ещё раз, что решение задач на построение напоминает строительство домов или игру с детским конструктором: начав с «кирпичиков» (деталей), мы собираем из них «блоки» и уже можем пользоваться ими, не обращая внимания на кирпичи, из которых эти блоки составлены; затем из «блоков» можно собирать более крупные «*блоки*» («*панели*»), и ими мы также сможем пользоваться, и т. д.

В рассмотренных примерах таким «блоком» является **построение вспомогательного треугольника**, то есть решение задачи сводится к уже известному нам построению какого-либо треугольника.

Ещё раз обращаем внимание на то, что в приведённых примерах намеренно обсуждался только алгоритм решения. Если подходить формально, то в условиях предложенных задач слово «Постройте ...» надо заменить на словосочетание «Объясните, как построить ...», и мы этого не сделали, только отдавая дань сложившейся традиции.

В заключение отметим, что в любом случае для построения треугольника достаточно задать **три** его элемента, среди которых хотя бы один — **линейный**.

Почему именно **три** элемента? Это связано с наличием признаков равенства треугольников. Действительно, если рассматривать только **основные элементы** треугольника, то наборы из трёх элементов, хотя бы один из которых линейный, либо в точности соответствуют условиям признаков равенства треугольников (три стороны; две стороны и угол между ними; сторона и два прилежащих к ней угла), либо легко сводятся к ним (сторона и два угла, один из которых лежит напротив этой стороны). То есть по таким трём основным элементам треугольник определяется однозначно.

Единственым исключением является такой набор: две стороны и угол, лежащий напротив одной из них. В этом случае могут существовать два треугольника, удовлетворяющих условию задачи.

Действительно, пусть надо построить треугольник ABC, в котором $AB = c$, $BC = a$, $\angle BAC = \alpha$. Тогда, построив угол A, равный α, и отложив на одной из его сторон отрезок AB длины c, проводим окружность с центром B и радиусом a. Эта окружность может не пересечься с другой стороной построенного угла (тогда задача решений не имеет), может касаться этой стороны (одно решение, искомый треугольник прямоугольный), а может пересечь её в двух точках (см. рис. 3). В последнем случае мы получим два треугольника, удовлетворяющих условию задачи: ABC_1 и ABC_2.

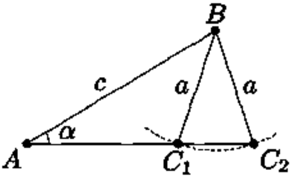


Рис. 3

О том, как именно зависит количество решений задачи от соотношения между заданными величинами, имеет смысл говорить после изучения школьниками метрических теорем для произвольного треугольника (обычно это происходит в 9 классе).

Задачи

Задача 1. Объясните, как построить углы, имеющие величину: а) 45°; б) 60°; в) 30°.

Задача 2. Объясните, как построить равнобедренный треугольник по углу при вершине и биссектрисе, проведённой к боковой стороне.

Задача 3. Объясните, как построить треугольник по следующим данным:

а) стороне и проведённым к ней медиане и высоте;

б) двум углам и высоте (рассмотрите два случая);

в) двум сторонам и медиане (рассмотрите два случая);

г) стороне, прилежащему к ней углу и сумме двух других сторон.

Задача 4. Объясните, как построить прямоугольный треугольник, если даны его острый угол и разность гипотенузы и катета.

Ответы и решения

Обсуждаются только алгоритмы построения, сведённые к крупным «блокам».

1. а) Возможны два способа: построить биссектрису прямого угла или построить равнобедренный прямоугольный треугольник, задав его катет произвольно.

б), в) Возможны два способа: построить равносторонний треугольник с произвольной стороной и биссектрису любого его угла или построить прямоугольный треугольник, у которого гипотенуза в два раза больше катета.

2. Решение сводится к построению вспомогательного треугольника ABL по стороне и двум углам (см. рис. 4; $AL = l$, $\angle ABL = \beta$, $\angle BAL = 45° - \frac{1}{4}\beta$). Искомый треугольник ABC получится, если на луче BL отложить отрезок BC, равный AB.

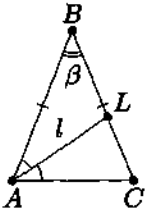


Рис. 4

3. а) Решение сводится к построению вспомогательного прямоугольного треугольника BHM по катету и гипотенузе (см. рис. 5; $BH = h$, $BM = m$). Искомый треугольник ABC получится, если на прямой MH отложить отрезки MC и MA, равные $0,5\,b$.

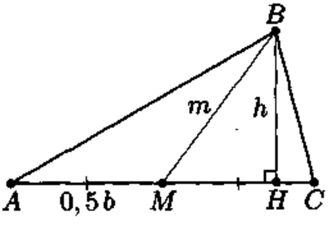


Рис. 5

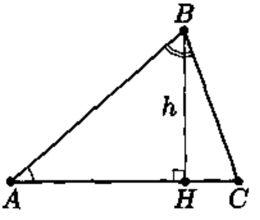


Рис. 6

б) Пусть данная высота искомого треугольника ABC проведена из вершины B. Поскольку по двум углам треугольника третий угол определяется однозначно, то можно считать, что заданы углы BAC, равный α, и ABC, равный β (см. рис. 6). Тогда решение сводится к построению вспомогательного прямоугольного треугольника ABH по катету и острому углу ($BH = h$, $\angle BAH = \alpha$) и откладыванию от луча BA в нужную полуплоскость угла CBA, равного β (точка C — пересечение прямой AH со стороной построенного угла).

При желании можно обратить внимание учащихся на то, что искомый треугольник ABC может получиться не только остроугольным, но также тупоугольным или прямоугольным (в зависимости от величин заданных углов).

в) Пусть в искомом треугольнике ABC заданы стороны $AB = c$ и $BC = a$. Если медиана проведена к одной из данных сторон, например, $AM = m$, то решение сводится к построению вспомогательного треугольника ABM по трём сторонам (см. рис. 7а; $AB = c$, $AM = m$, $BM = 0,5\,a$) и его очевидному достраиванию до искомого треугольника.

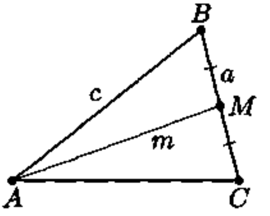


Рис. 7а

Если медиана проведена к третьей стороне, то есть $BM = m$, то для получения вспомогательного треугольника необходимо сделать дополнительное построение: на луче BM отметим точку D так, что $DM = BM$ (см. рис. 7б). Тогда треугольники CBM и ADM равны (по двум сторонам и углу между ними), поэтому $AD = BC = a$. Тем самым решение сведётся к построению вспомогательного треугольника ABD по трём сторонам ($AB = c$, $AD = a$, $BD = 2m$).

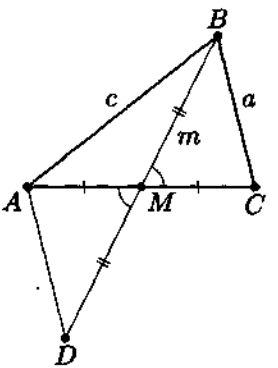


Рис. 7б

Разделив отрезок BD пополам, получим точку M, после чего построение искомого треугольника становится очевидным.

г) Пусть в искомом треугольнике ABC: $\angle BAC = \alpha$, $AC = b$, $AB + BC = s$. Тогда, отметив на луче AB точку D так, что $DB = BC$, получим вспомогательный треугольник ACD, который можно построить по двум сторонам и углу между ними (см. рис. 8; $\angle BAC = \alpha$, $AC = b$, $AD = s$). Вершину B искомого треугольника можно получить на отрезке AD, проведя, например, серединный перпендикуляр к отрезку CD, либо отложив от луча CD в нужную полуплоскость угол BCD, равный углу ADC.

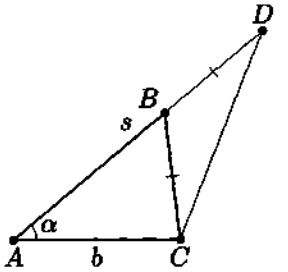


Рис. 8

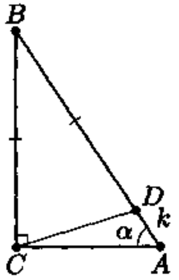


Рис. 9

4. Пусть в искомом треугольнике ABC выполняются соотношения $\angle BCA = 90°$, $\angle BAC = \alpha$, $AB - BC = k$. Тогда, отметив на отрезке AB точку D так, что $BD = BC$, получим, что $AD = k$ (см. рис. 9). Кроме того, $\angle ABC = 90° - \alpha$, поэтому, $\angle BDC = \angle BCD = 45° + \frac{1}{2}\alpha$, тогда $\angle ADC = 135° - \frac{1}{2}\alpha$.

Следовательно, можно построить вспомогательный треугольник ACD по стороне и двум прилежащим углам ($AD = k$, $\angle BAC = \alpha$, $\angle ADC = 135° - \frac{1}{2}\alpha$). Различные способы его достраивания до искомого треугольника очевидны.

Отметим, что если вместо угла BAC задан угол ABC, то задача легко сводится к предыдущей.

К теме данного занятия также относятся задачи 1а–в, е, к, 2а–в, 3а, б, 4, 5, 19д из раздела «Задачи для самостоятельного решения».

Занятие 2

Метод геометрических мест

На этом занятии мы рассмотрим *решение задач на построение* с помощью **метода геометрических мест** точек на плоскости (сокращённо — ГМТ).

Метод геометрических мест основан на том, что часть объектов, получаемых при стандартных построениях циркулем и линейкой, являются одновременно ГМТ, обладающих определёнными свойствами. Например, окружность является геометрическим местом точек, удалённых от заданной точки на фиксированное расстояние; серединный перпендикуляр к отрезку — ГМТ, равноудалённых от концов отрезка; биссектриса угла — ГМТ, лежащих внутри угла и равноудалённых от его сторон, и т. д. Помимо этого, некоторые ГМТ несложно построить, используя простейшие построения, метод вспомогательных треугольников и уже построенные ГМТ (см. задачи 1 и 2 данного занятия).

Суть метода ГМТ состоит в следующем:

Если некоторая точка X удовлетворяет двум условиям, то строятся ГМТ, удовлетворяющие каждому из этих условий, и тогда точка X принадлежит их пересечению.

Проиллюстрировать этот метод можно на одном из простейших построений, которые вам известны — построении треугольника *по трём сторонам*. Действительно, построив одну из данных сторон (и тем самым две вершины искомого треугольника), ищем третью вершину как пересечение двух ГМТ — удалённых от имеющихся точек на заданные расстояния.

Рассмотрим более сложные примеры.

При необходимости перед рассмотрением примеров можно напомнить учащимся основные ГМТ на плоскости, которые им должны быть известны, в частности:

ГМТ, удалённых от данной точки на заданное расстояние (*окружность с центром в данной точке и радиусом, равным заданному расстоянию*);

ГМТ, удалённых от данной прямой на заданное расстояние (*пара параллельных прямых, каждая точка которых находится на заданном расстоянии от данной прямой*);

ГМТ, равноудалённых от двух данных точек (*серединный перпендикуляр к отрезку, соединяющему эти точки*);

ГМТ, равноудалённых от сторон угла и лежащих внутри этого угла (*биссектриса угла*);

ГМТ, из которых данный отрезок виден под прямым углом (*окружность, у которой данный отрезок является диаметром, с «выколотыми» концами данного отрезка*).

О том, как строить некоторые из этих ГМТ, учащиеся вспомнят при решении первых задач из этого занятия.

Пример 1. Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе и проведённой к ней высоте.

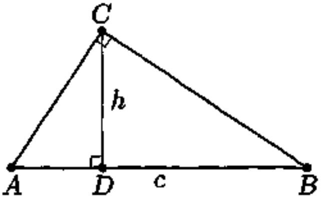


Рис. 1

Решение. Пусть искомый треугольник ABC с гипотенузой AB, равной c, и высотой CD, равной h, построен (см. рис. 1). **Вспомогательного треугольника** нет, так как ни один из полученных на чертеже треугольников построить по имеющимся данным нельзя. Создать его путем дополнительных построений также непросто. Но про вершину C известно, что: 1) $\angle ACB = 90°$; 2) расстояние от C до прямой AB равно h.

Поэтому решение задачи сводится к построению отрезка AB, имеющего заданную длину c, затем к построению ГМТ, из которых этот отрезок «виден» под прямым углом, и ГМТ, находящихся на данном расстоянии от данной прямой AB. Вершина C является пересечением построенных ГМТ.

Отметим, что при решении этой задачи крупными «блоками» было уже не построение вспомогательных треугольников, а построение известных геометрических мест.

После того как учащиеся решат задачу 1 из этого занятия, можно вернуться к этому примеру, показав на чертеже оба использованных ГМТ.

Пример 2. Постройте окружность, касающуюся данной прямой m и касающуюся данной окружности в данной точке A внешним образом.

Решение. Пусть даны прямая m и окружность с центром O, на которой отмечена точка A. Пусть искомая окружность построена, P — её центр (см. рис. 2а, б). Так как искомая окружность проходит через фиксированную точку A, то для построения этой окружности достаточно построить её центр P. Так как окружности касаются в точке A внешним образом, то точки O, A и P лежат на одной прямой (A лежит между O и P).

Первый способ. Если через точку A провести также общую касательную AQ к этим окружностям (Q — точка её пересечения с данной прямой m), то луч QP будет являться биссектрисой угла AQM (см. рис. 2а).

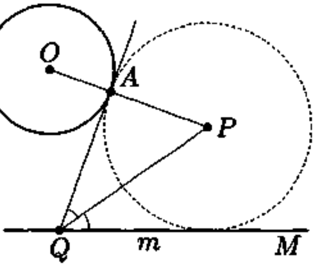


Рис. 2а

Таким образом, решение задачи сводится к построению луча OA, касательной QA к данной окружности и биссектрисы QP угла AQM. Центр искомой окружности P — точка пересечения луча OA и этой биссектрисы.

О том, как построить касательную QA, можно ещё раз поговорить при разборе задачи 2 для самостоятельного решения.

Второй способ. Рассмотрим перпендикуляры OD и PC, опущенные из центров данной и искомой окружностей на прямую m

(см. рис. 2б). Пусть B — одна из точек пересечения OD и данной окружности, тогда, так как $BD \parallel PC$, то $\angle OAB = \angle DBC = \angle PCB = \angle PAC$, значит, углы OAB и PAC вертикальные, то есть точка A лежит на прямой BC. Следовательно, искомая точка P лежит на перпендикуляре, восставленном к прямой m из точки C, которая является пересечением прямых m и AB.

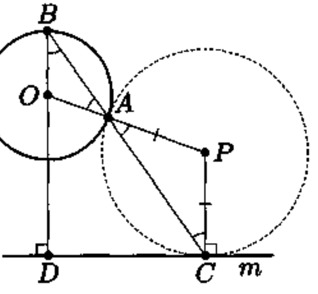


Рис. 2б

Отметим, что если касательная QA параллельна прямой m (первый способ решения) или, что равносильно, точка A лежит на отрезке BD (второй способ решения), то решением задачи является окружность с диаметром AD.

Отметим, что, решая задачу вторым способом и выбрав вместо точки B ей диаметрально противоположную, получим не внешнее, а внутреннее касание окружностей.

А как получить случай внутреннего касания при решении первым способом? [Построить биссектрису угла, смежного с углом AQM.]

Рассмотренные способы решения возникают потому, что задача сводится к построению точки P, лежащей на данном луче OA и равноудалённой от данной прямой m и данной окружности.

Задачи

Задача 1. Объясните, как построить следующие ГМТ:

а) удалённых от данной прямой на заданное расстояние;

б) из которых данный отрезок виден под заданным углом (рассмотрите три случая: заданный угол — прямой, острый и тупой).

Задача 2. Объясните, как построить касательную к окружности, проходящую через заданную точку (рассмотрите два случая).

Задача 3. Объясните, как построить треугольник по стороне, проведённой к ней медиане и радиусу описанной окружности.

Задача 4. Объясните, как построить окружность, которая касается данной прямой m в данной точке B и проходит через данную точку A, не лежащую на прямой m.

Задача 5. Даны три точки A, B и C. Объясните, как построить три окружности, попарно касающиеся в этих точках.

Задача 6. Даны окружность и прямая m, её не пересекающая. Объясните, как построить окружность, которая касается данной окружности и данной прямой в заданной точке Q, принадлежащей этой прямой.

Задача 7. Объясните, как построить прямую, проходящую через заданную точку M так, чтобы она отсекала от данного угла треугольник с заданным периметром.

Ответы и решения

1. а) Пусть дана прямая a и задано расстояние $r > 0$. Тогда искомое ГМТ — объединение двух прямых b и c, параллельных a и таких, что расстояние от a до каждой из них равно r. Построение любой из них сводится к восставлению произвольного перпендикуляра AB длины r к прямой a и проведению прямой BC, перпендикулярной AB (см. рис. 3).

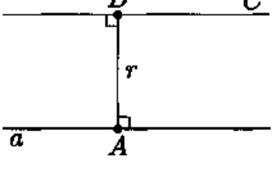


Рис. 3

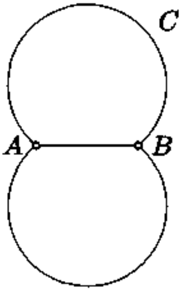


Рис. 4а

б) Пусть дан отрезок AB длины c и угол α. Тогда искомое ГМТ — объединение дуги ACB окружности и дуги, ей симметричной относительно прямой AB, за исключением точек A и B (см. рис. 4а — для случая острого угла α).

Неформальное название такого ГМТ — «уши Чебурашки».

Если $\alpha = 90°$, то обе дуги принадлежат одной окружности с диаметром AB, построение которой очевидно (см. рис. 4б).

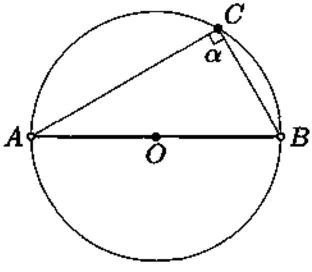


Рис. 4б

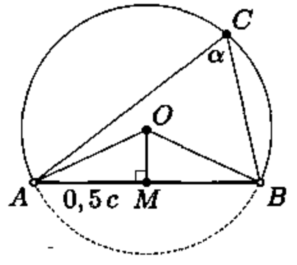


Рис. 4в

Если $0 < \alpha < 90°$, то $\angle AOB = 2\alpha$, где O — центр искомой окружности. Для того чтобы получить точку O (и, тем самым построить требуемую дугу окружности) достаточно построить прямоугольный треугольник AMO по катету и прилежащему острому углу ($\angle AMO = 90°$; $AM = 0,5\,c$; $\angle OAM = 90° - \alpha$; см. рис. 4в).

Если $90° < \alpha < 180°$, то $\angle AOB = 360° - 2\alpha$, где O — центр искомой окружности, и тогда прямоугольный треугольник AMO строится по аналогичным данным: $\angle AMO = 90°$; $AM = 0,5\,c$; $\angle OAM = \alpha - 90°$ (см. рис. 4г).

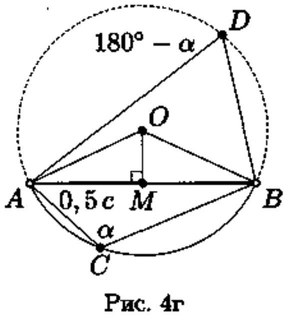


Рис. 4г

2. Пусть дана окружность с центром O и точка A, через которую проведена касательная AB к этой окружности. Возможны два случая: а) точка A лежит на данной окружности; б) точка A лежит вне данной окружности (см. рис. 5а, б соответственно).

В обоих случаях прямая AB перпендикулярна радиусу, проведённому в точку касания (по определению касательной). Следовательно, в случае а) задача сводится к построению перпендикуляра к прямой OA, проходящего через данную точку A (такое построение уже использовалось при рассмотрении примера 2).

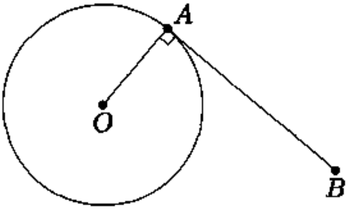


Рис. 5а

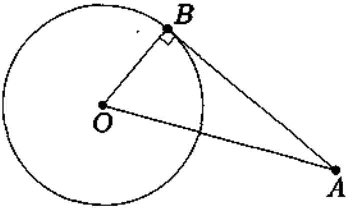


Рис. 5б

В случае б) отрезок OA виден из точки B под углом $90°$. Следовательно, задача сводится к построению окружности с диаметром OA. Искомая касательная проходит через A и точку пересечения окружностей.

Кто-то из учащихся может предложить такой «способ построения» в пункте б): приложим линейку так, чтобы прямая прошла через точку A и имела с окружностью ровно одну общую точку (ссылаясь на утверждение, равносильное определению касательной). В этом случае можно, например, предложить доказать, что эта точка — единственная. В процессе обсуждения неизбежно «всплывёт» идея перпендикулярности.

Так как построение касательной к окружности часто используется при решении различных задач на построение, имеет смысл в дальнейшем считать это построение стандартным и ссылаться на него.

3. Пусть в искомом треугольнике ABC: $AB = c$, CM — медиана длины m, R — радиус описанной окружности (см. рис. 6). Решение сводится к построению окружности данного радиуса R и её хорды AB заданной длины c. Вершина C удалена от середины M отрезка AB на расстояние m, поэтому лежит на пересечении окружности с центром M и радиусом m и уже построенной окружности.

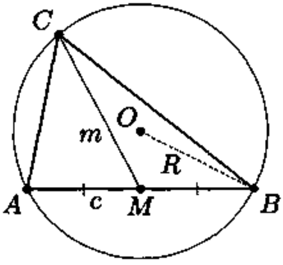


Рис. 6

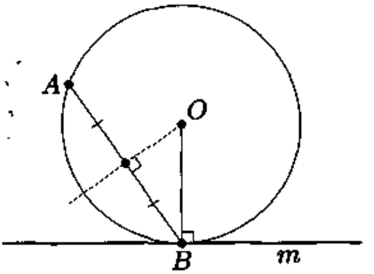


Рис. 7

4. Так как искомая окружность проходит через фиксированные точки A и B, для её построения достаточно построить центр O этой окружности. Так как m — касательная к окружности в точке B, то $OB \perp m$, а поскольку AB — хорда искомой окружности, то точка O равноудалена от точек A и B (см. рис. 7). Таким образом, O является пересечением перпендикуляра, восставленного к прямой m в точке B, и серединного перпендикуляра к отрезку AB.

5. Пусть A_1, B_1 и C_1 — центры искомых окружностей (см. рис. 8). Тогда в треугольнике $A_1B_1C_1$: $B_1A = B_1C$, $C_1A = C_1B$ и $A_1B = A_1C$. Значит, данные точки A, B и C являются точками касания окружности, вписанной в треугольник $A_1B_1C_1$, с его сторонами (это можно доказать, например, методом от противного). Таким образом, решение сводится к построению окружности, проходящей через точки A, B и C и касательных к ней в этих точках. Центры искомых окружностей — точки попарного пересечения этих касательных.

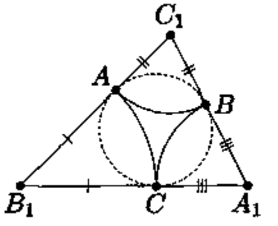


Рис. 8

6. Пусть искомая окружность построена, P — её центр, A — точка её касания с данной окружностью, имеющей центр O (см. рис. 9а, б). Поскольку искомая окружность проходит через фиксированную точку Q, то её построение сводится к построению точки P.

Первый способ. Проведём касательную n к данной окружности, параллельную прямой m (C — точка касания, см рис. 9а). Рассмотрим равнобедренные треугольники COA и APQ. Так как в этих треугольниках равны углы при вершинах O и P, то равны и углы при основаниях. Тогда из того, что $\angle OAC = \angle PAQ$ и точка A лежит на прямой OP, следует, что точка A лежит и на прямой CQ.

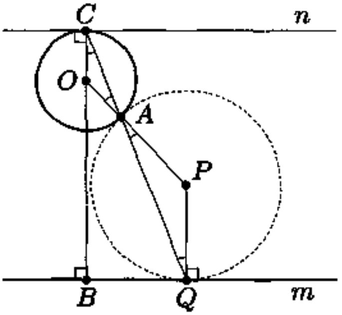


Рис. 9а

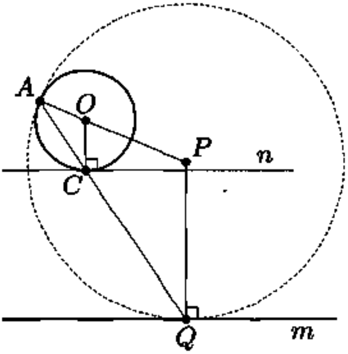


Рис. 9б

Таким образом, искомое построение сводится к следующему: построению перпендикуляра к прямой m в точке Q и радиуса OC, ему параллельного; затем построению прямой CQ, пересекающей данную окружность в точке A. Искомая точка P является пересечением прямой OA с построенным перпендикуляром.

Отметим, что если перпендикуляр к прямой m в точке Q пройдёт через точку O, то точка A будет лежать на этом перпендикуляре, тогда окружность с диаметром QA и будет искомой.

Отметим также, что если провести другую касательную к данной окружности, параллельную прямой m, то аналогичное построение обеспечит внутреннее касание окружностей (см. рис. 9б).

Второй способ. Пусть r — радиус данной окружности. Заметим, что радиус искомой окружности (расстояние от искомого центра P до прямой m) $PQ = PO \pm r$ (знак «$-$» в случае внешнего касания окружностей, знак «$+$» — в случае внутреннего касания, см. рис. 9а, б). Проведём прямую PQ и рассмотрим на ней такую точку E, что $QE = r$ (см. рис. 9в). Тогда искомая точка P равноудалена от точек O и E.

Таким образом, искомое построение сводится к построению перпендикуляра к прямой m в точке Q, описанному построению точки E на прямой PQ и проведению серединного перпендикуляра к отрезку OE. Искомая точка P является пересечением этих двух перпендикуляров (точки E, A и P с индексом 1 на рис. 9в соответствуют случаю внешнего касания окружностей, а с индексом 2 — внутреннего касания).

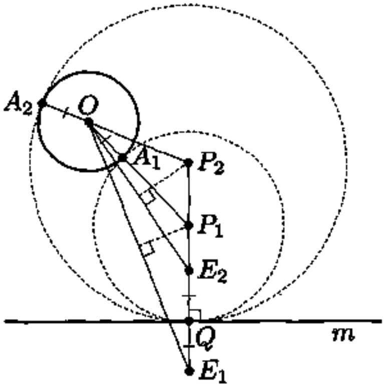


Рис. 9в

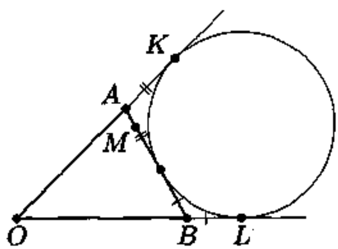


Рис. 10

7. Пусть AB — искомая прямая, то есть треугольник AOB имеет заданный периметр P. Проведём окружность, касающуюся сторон данного угла и отрезка AB (см. рис. 10). Пусть K и L — точки касания этой окружности со сторонами угла, тогда из теоремы о равенстве отрезков касательных, проведённых к окружности из одной точки, следует, что $OK = OL = 0,5\,P$.

Таким образом, решение задачи сводится к построению вспомогательного равнобедренного треугольника KOL (сторону KL которого можно не проводить) и окружности, касающейся сторон данного угла в точках K и L. После этого через точку M проводится касательная AB к этой окружности.

К теме данного занятия также относятся задачи 1г, л, 2г, 4–7, 9, 13, 18б, 19г, 49, 57 из раздела «Задачи для самостоятельного решения».

Занятие 3

Построения, связанные со свойствами четырёхугольников и с замечательными линиями и точками треугольников

На этом занятии мы рассмотрим *решение задач на построение* четырёхугольников и *решение задач на построение* треугольников, в которых применяются свойства их замечательных линий и точек.

Решение задач на построение четырёхугольников сводится, как правило, к решению задач на построение треугольников. При этом применяются уже известные нам два основных метода: **вспомогательного треугольника и ГМТ**.

Пример 1. Постройте параллелограмм по углу и двум высотам.

Решение. Пусть искомый параллелограмм $ABCD$ с углом BAD, равным α, и высотами BM и BK, длины которых h_1 и h_2, построен (см. рис. 1). Так как сумма углов четырёхугольника $BKDM$ равна 360°, то $\angle KBM = 180° - \angle ADC = \angle BAD = \alpha$.

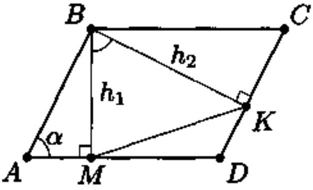


Рис. 1

Следовательно, решение задачи сводится к построению вспомогательного треугольника BMK по двум сторонам и углу между ними, а затем, проведя через точки B и M перпендикуляры к BM, а через точки B и K — перпендикуляры к BK, можно получить остальные вершины искомого параллелограмма.

Как изменится решение, если заданный угол α будет тупым? [$\angle KBM = 180° - \alpha$.]

Можно предложить и другой способ решения, использующий метод ГМТ. Длина высоты параллелограмма является расстоянием между его параллельными сторонами, поэтому можно построить, например, угол A, равный данному, а каждую из вершин B и D искомого параллелограмма получить как пересечение стороны этого угла с прямой, параллельной другой стороне угла и находящейся от неё на расстоянии h_1 или h_2 соответственно (см. рис. 1).

Прежде чем переходить к следующим задачам, отметим, что мы, согласно предварительной договорённости, обсуждали пока только **алгоритмы решения задач на построение**. Вместе с тем, исторически сложилось, что полное изложение решения любой задачи на построение включает в себя следующие **этапы**.

1) **Анализ** (то есть, решение задачи «с конца» путем построения некоего алгоритма).

2) Осуществление самого **построения и его описание**.

3) **Доказательство** того, что построенная фигура удовлетворяет условию.

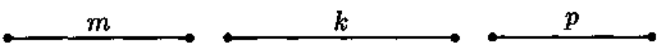
4) **Исследование**, то есть выяснение количества решений задачи и условий, от которых оно зависит.

Поясним, что количество решений определяется **с точностью до равенства фигур**, то есть если при построении получилось несколько фигур, удовлетворяющих условию задачи, но они между собой равны, то это считается одним решением!

До сих пор мы занимались только первым этапом решения. Сейчас в качестве иллюстрации рассмотрим **полное решение** одной из задач и его формальную запись.

Пример 2. Постройте треугольник по трём медианам.

Дано:



Построить: $\triangle ABC \mid AM$, BK и CP — его медианы; $AM = m$, $BK = k$, $CP = p$.

Решение. 1) **Анализ.**

Пусть искомый треугольник ABC с медианами AM, BK и CP, пересекающимися в точке T, построен (см. рис. 2). На луче TM выберем точку N так, чтобы $MN = TM = \frac{1}{3}AM$, тогда четырёхугольник $BTCN$ — параллелограмм (так как его диагонали точкой пересечения M делятся пополам). Следовательно, $BN = CT = \frac{2}{3}CP = \frac{2}{3}p$.

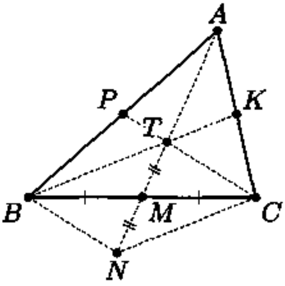


Рис. 2

Таким образом, мы получили вспомогательный треугольник BNT, в котором: $TN = \frac{2}{3}m$, $BT = \frac{2}{3}k$, $BN = \frac{2}{3}p$.

2) **Построение.**

1. Строим треугольник BNT по трём сторонам, указанным выше.
2. Строим отрезок BM — медиану этого треугольника.
3. На луче BM откладываем отрезок MC, равный BM.
4. На луче NT откладываем отрезок TA, равный NT.
5. Проводим отрезки AB и AC; $\triangle ABC$ — искомый.

3) **Доказательство.**

AM — медиана треугольника ABC (по построению, см. п. 3), $AM = AT + TM = TN + TM = m$.

Так как $AT : TM = 2 : 1$, то лучи BT и CT пересекают стороны AC и AB в их серединах (точках K и P соответственно). Следовательно, BK и CP — также медианы треугольника ABC. При этом $BK = \frac{3}{2}BT = k$, $CP = \frac{3}{2}CT = p$.

4) **Исследование.**

Задача имеет **единственное решение**, если существует вспомогательный треугольник BNT, то есть если выполняется неравенство $|k - p| < m < k + p$. В остальных случаях задача решений не имеет.

Заметим, что если **анализ** проведён грамотно, то второй и третий этапы являются в значительной степени формальными, поскольку **описание построения** осуществляется практически теми же «блоками», но в обратном порядке, а **доказательство**, как правило, непосредственно следует из первых двух пунктов. **Исследование** стоит несколько особняком, но на начальных этапах изучения геометрии его проведение во многих случаях затруднено, так как требует знания ряда метрических соотношений.

Исходя из изложенного, мы и в дальнейшем при решении задач на построение будем ограничиваться проведением **анализа**, дополняя его иногда **исследованием**.

Заметим также, что рассмотренную задачу на построение треугольника по трём медианам можно было свести к уже решённой задаче на построение треугольника по двум сторонам и медиане, проведённой к третьей стороне (*см. задачу 3в занятия* 1). В этом случае в качестве вспомогательного «выступает» треугольник BCT (см. рис. 2). Использованную задачу можно считать очередным крупным «блоком», который пригодится для решения других задач на построение.

Хорошей иллюстрацией использования различных свойств биссектрисы треугольника является следующая задача.

Пример 3. Постройте треугольник по углу и двум отрезкам, на которые биссектриса этого угла разбивает противолежащую сторону треугольника.

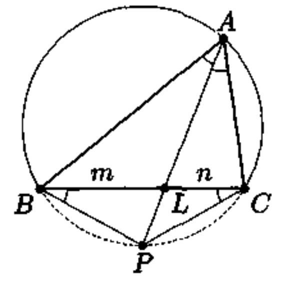


Рис. 3а

Решение. Пусть искомый треугольник ABC, в котором $\angle BAC = \alpha$ и биссектриса AL делит сторону BC на отрезки $BL = m$ и $CL = n$, построен (см. рис. 3а, б). Заметим, что $BC = m + n$ и этот отрезок виден из точки A под заданным углом α, то есть вершина A искомого треугольника принадлежит уже известному ГМТ, из которых данный отрезок виден под заданным углом.

Далее можно рассуждать по-разному.

Первый способ. Рассмотрим окружность, описанную около треугольника ABC, и продолжим биссектрису AL до пересечения с этой окружностью в точке P, тогда P — середина дуги BC (см. рис. 3а).

В этом случае решение задачи сводится к последовательному построению отрезков $BL = m$ и $LC = n$, лежащих на одной прямой; построению окружности, содержащей ГМТ, из которых отрезок BC виден под углом α, и построению серединного перпендикуляра к отрезку BC, пересекающего дугу окружности, отличную от рассмотренного ГМТ, в точке P. Вершина A будет являться пересечением прямой PL и построенной окружности.

Исходя из описанного построения задача всегда имеет решение, и оно единственное.

Второй способ. По свойству биссектрисы треугольника $\frac{AB}{AC} = \frac{BL}{CL} = \frac{m}{n}$. Следовательно, вершина A искомого треугольника принадлежит ГМТ, отношение расстояний от которых до двух заданных точек есть постоянная положительная величина. При $m = n$ этим ГМТ является серединный перпендикуляр к отрезку BC, а при $m \neq n$ это ГМТ представляет собой окружность с диаметром L_1L_2, где L_1 и L_2 соответственно — основания биссектрис внутреннего и внешнего углов треугольника при вершине A. Эта окружность называется **окружностью Аполлония** (*доказательство этого факта и другие подробности об окружности Аполлония — см. Приложения*).

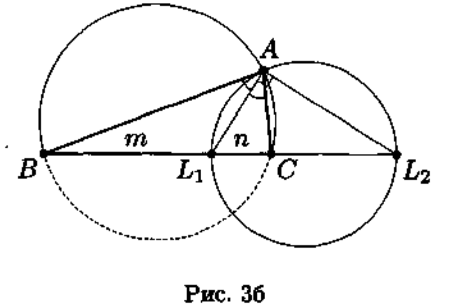


Рис. 3б

Таким образом, точки L_1 и L_2, лежащие на прямой BC, можно построить, используя равенство $BL : CL = m : n$, после чего построить окружность с диаметром L_1L_2. Тогда искомую вершину A можно получить как пересечение двух уже описанных ГМТ (см. рис. 3б).

Отметим, что эта задача может быть решена также алгебраическим методом (*см. занятие* 4), либо методом подобия (*см. занятие* 7).

Задачи

Задача 1. Постройте ромб по стороне и радиусу вписанной окружности.

Задача 2. Постройте прямоугольник по диагонали и периметру.

Задача 3. Постройте треугольник по двум высотам и медиане, если все они проведены из разных вершин.

Задача 4. Постройте треугольник ABC, зная положение центров трёх его вневписанных окружностей. (Напомним, что вневписанной окружностью называется окружность, касающаяся стороны треугольника и продолжений двух других сторон.)

Задача 5. Постройте треугольник, если даны точки пересечения описанной около этого треугольника окружности с продолжениями медианы, биссектрисы и высоты, проведёнными из одной вершины.

Задача 6. Восстановите треугольник по основаниям его высот.

Задача 7. Постройте параллелограмм $ABCD$, если на плоскости отмечены три точки: середины его высот BH и BP и середина M стороны AD.

Ответы и решения

1. Пусть искомый ромб $ABCD$ построен, O — точка пересечения его диагоналей, которая является центром вписанной окружности, перпендикуляр OM к стороне AB — радиус этой окружности (см. рис. 4а). Тогда решение задачи сводится к построению вспомогательного прямоугольного треугольника AOB по гипотенузе и проведённой к ней высоте ($\angle AOB = 90°$, $AB = a$,

$OM = r$) — см. пример 1 занятия 2. Дальнейшее достраивание его до искомого ромба основано на том, что точка O — середина диагоналей AC и BD.

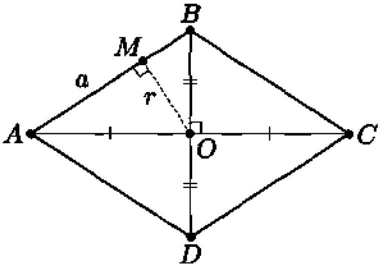


Рис. 4а

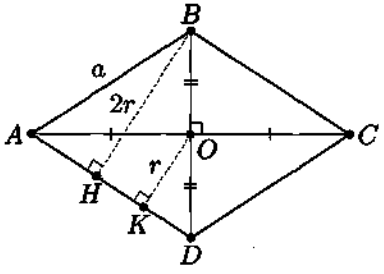


Рис. 4б

Другой возможный способ построения — использовать вспомогательный прямоугольный треугольник ABH, который строится по катету и гипотенузе ($\angle AHB = 90°$, $AB = a$, $BH = 2r$, см. рис. 4б).

Задача имеет единственное решение, если $a > 2r > 0$, так как при этих условиях единственное решение имеет задача о построении вспомогательного треугольника.

2. Пусть искомый прямоугольник $ABCD$ периметра P, в котором диагональ $AC = d$, построен (см. рис. 5а). Тогда $AB + BC = 0{,}5\,P$, поэтому решение задачи сводится к построению прямоугольного треугольника ABC по гипотенузе и сумме катетов (и его очевидному достраиванию до искомого прямоугольника).

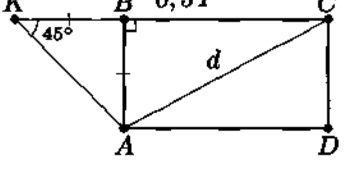


Рис. 5а

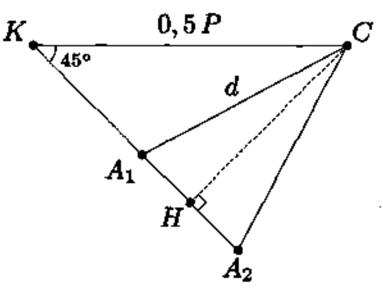


Рис. 5б

Отложив на луче CB вне прямоугольника отрезок BK, равный AB, получим вспомогательный треугольник ACK, в котором $AC = d$, $CK = 0,5\,P$, $\angle AKC = 45°$. Значит, этот треугольник строится по двум сторонам и углу, противолежащему одной из сторон. Точка B, равноудалённая от вершин A и K, лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AK.

Отметим, что задача на построение вспомогательного треугольника ACK не имеет решения, если $d < CH = \frac{KC\sqrt{2}}{2} = \frac{P\sqrt{2}}{4}$ (см. рис. 5б) или если $d \geq \frac{P}{2}$, поэтому в этих случаях не имеет решения и исходная задача. При $d = \frac{P\sqrt{2}}{4}$ вспомогательная задача имеет одно решение, а при $\frac{P\sqrt{2}}{4} < d < \frac{P}{2}$ — два решения, но **исходная задача** в любом случае имеет **одно решение**, так как получаемые прямоугольники равны.

3. Пусть искомый треугольник ABC с высотами $AK = h_1$, $BN = h_2$ и медианой $CM = m$ построен (см. рис. 6). На луче CM отметим точку D так, что $DM = CM$. Тогда $ADBC$ — параллелограмм, в котором дополнительно проведём высоты $DH = h_2$ и $DT = h_1$.

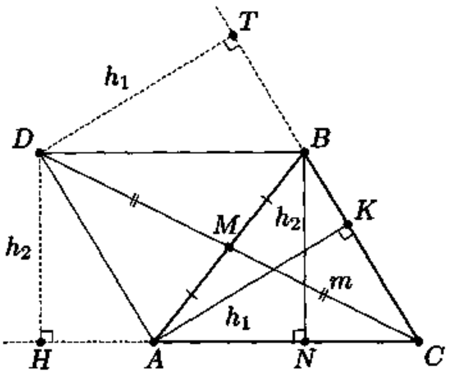


Рис. 6

Решение задачи сводится к построению вспомогательного прямоугольного треугольника CDH по гипотенузе и катету

($\angle DHC = 90°$, $CD = 2m$, $DH = h_2$). Так как прямая BC находится на расстоянии h_1 от точки D, далее проведём окружность с центром D и радиусом h_1 и касательную к ней через точку C (вне треугольника). Тогда, проведя через точку D прямые, соответственно параллельные этой касательной и прямой CH, получим вершины A и B искомого треугольника.

Исходя из последовательности построений задача имеет решение, если $h_1 < 2m$ и $h_2 < 2m$, причём оно единственное.

4. Пусть искомый треугольник ABC, в котором заданные точки A_1, B_1 и C_1 являются центрами вневписанных окружностей, построен (см. рис. 7). Заметим, что центр каждой вневписанной окружности лежит на пересечении соответствующих биссектрис внутреннего и внешнего углов треугольника ABC.

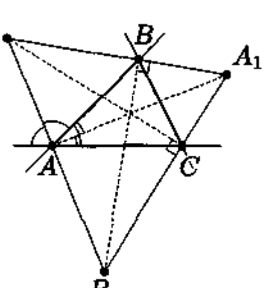


Рис. 7

Рассмотрим треугольник $A_1B_1C_1$. Так как биссектрисы вертикальных углов лежат на одной прямой, вершины A, B и C искомого треугольника лежат на сторонах треугольника $A_1B_1C_1$. Кроме того, поскольку биссектриса внешнего угла треугольника перпендикулярна биссектрисе внутреннего угла, проведённой из той же вершины, то $A_1A \perp B_1C_1$, $B_1B \perp A_1C_1$, $C_1C \perp A_1B_1$.

Таким образом, решение задачи сводится к построению треугольника $A_1B_1C_1$ и его высот.

В задачах на «восстановление фигур» по заданным точкам не всегда имеет смысл проводить исследование.

В данном случае полезно отметить, что независимо от вида треугольника ABC соответствующий ему треугольник $A_1B_1C_1$ — остроугольный. Действительно, пусть $\angle BAC = \alpha$, тогда $\angle ABC + \angle ACB = 180° - \alpha$ (см. рис. 7). Значит, сумма двух внешних углов при вершинах B и C равна $180° + \alpha$, то есть $\angle A_1BC + \angle A_1CB = 90° + \frac{1}{2}\alpha$. Следовательно, $\angle BA_1C = 90° - \frac{1}{2}\alpha < 90°$. Аналогичное рассуждение можно провести для других углов треугольника $A_1B_1C_1$. Таким образом, задача имеет решение, если треугольник $A_1B_1C_1$ — остроугольный, причём решение единственное.

5. Пусть ABC — искомый треугольник; BM, BH и BL — его медиана, высота и биссектриса соответственно; K, Q и P — точки их пересечения с описанной около треугольника ABC окружностью с центром O (см. рис. 8). Заметим, что треугольник KPQ вписан в ту же окружность, при этом $\angle ABP = \angle CBP$, поэтому точка P — середина дуги AC. Значит, $OP \parallel BQ$ и точка M лежит на прямой OP.

Следовательно, решение задачи сведётся к построению окружности, описанной около треугольника KPQ и восстановлению на ней вершин искомого треугольника ABC.

Вершина B получится при пересечении построенной окружности с прямой, параллельной OP и проходящей через точку Q. Точка M является пересечением прямых OP и BK. Вершины A и C получатся при пересечении окружности с прямой, проходящей через точку M и перпендикулярной OP.

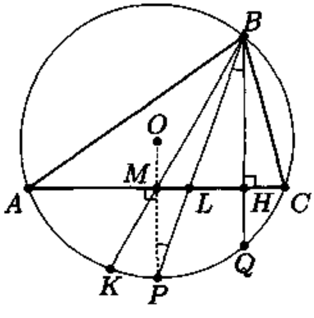


Рис. 8

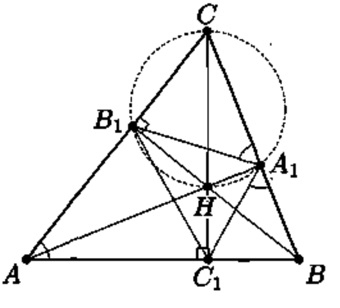


Рис. 9

6. Пусть заданные точки A_1, B_1 и C_1 — основания высот искомого треугольника ABC, H — его ортоцентр (см. рис. 9). Докажем, что лучи A_1H, B_1H и C_1H являются биссектрисами углов треугольника $A_1B_1C_1$. Это можно сделать различными способами, например, так.

Докажем сначала, что $\angle CA_1B_1 = \angle CAB$. Действительно, поскольку $\angle AA_1B = \angle BB_1A = 90°$, то точки A, A_1, B_1 и B лежат на окружности с диаметром AB. Тогда $\angle CA_1B_1 = 90° - \angle AA_1B_1 = 90° - \angle B_1BA = \angle CAB$. Аналогично доказывается, что $\angle C_1A_1B = \angle CAB$, следовательно, $\angle CA_1B_1 = \angle C_1A_1B$. Тогда, так как $AA_1 \perp BC$, то $\angle B_1A_1A = \angle C_1A_1A$.

Аналогично можно доказать, что лучи B_1B и C_1C являются биссектрисами углов B_1 и C_1 треугольника $A_1B_1C_1$ (H — точка пересечения биссектрис этого треугольника).

Таким образом, решение исходной задачи сводится к построению треугольника $A_1B_1C_1$ и его биссектрис. Прямые, перпендикулярные этим биссектрисам и проходящие через точки A_1, B_1 и C_1, будут содержать стороны искомого треугольника, поэтому его вершины являются точками попарного пересечения построенных прямых.

7. Пусть искомый параллелограмм $ABCD$ построен, точки K и L — середины его высот BH и BP соответственно (см. рис. 10). Проведём отрезок ML. Поскольку $AM = MD$ и $BL = LP$, то ML — средняя линия трапеции $ABPD$, поэтому $ML \parallel CD$ и $ML \perp BP$. Следовательно, вершина B искомого параллелограмма принадлежит прямой l, перпендикулярной отрезку ML.

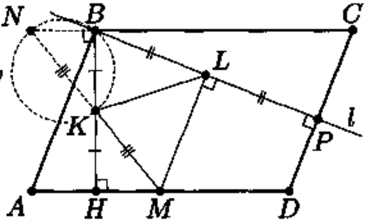


Рис. 10

Проведём прямую KM и отложим на ней отрезок KN, равный KM. Поскольку $\triangle KBN = \triangle KHM$ (по первому признаку), то $\angle NBK = 90°$, то есть вершина B принадлежит окружности ω с диаметром NK. Таким образом, вершина B искомого параллелограмма $ABCD$ является пересечением прямой l и окружности ω. Дальнейшее построение очевидно.

В зависимости от количества точек пересечения прямой l и окружности ω задача может иметь два решения, одно решение или ни одного.

К теме данного занятия также относятся задачи 1д, ж, з, и, м, н, 3в, 15а–в, е, 16а, б, 18а, в, г, 19а, в, 27, 52, 58а, 64 из раздела «Задачи для самостоятельного решения».

Занятие 4

Алгебраические методы

Настала пора расширить наш «багаж» **стандартных** построений. Эта необходимость связана с тем, что существует ряд задач, в которых трудно (или невозможно) найти алгоритм решения, напрямую используя комбинации двух уже известных нам методов: **вспомогательного треугольника и ГМТ** (даже если привлечь уже известные свойства изученных геометрических фигур). Вместе с тем, в этих задачах иногда бывает нетрудно записать алгебраические соотношения, выражающие неизвестные элементы предлагаемой конструкции через заданные. Научившись «интерпретировать» алгебраические формулы в виде построений циркулем и линейкой, мы научимся решать такие задачи.

Начнём с того, что, зная теорему Фалеса, мы умеем делить данный отрезок на n равных частей (для любого натурального n).

Это построение мы не приводим, так как оно разбирается во всех стандартных школьных учебниках (*см., например*, [1], [3], [5], [13] *или* [19]).

Тогда если дан отрезок длины a, то можно построить любой отрезок длины $\frac{m}{n}a$, где m и n — натуральные числа. А как обстоит дело с иррациональными числами, то есть сможем ли мы построить, например, отрезки длины $a\sqrt{2}$ или $a\sqrt{3}$, если задан отрезок длины a?

Да, конечно. В первом случае достаточно построить равнобедренный прямоугольный треугольник с катетом a, тогда его гипотенуза и будет искомым отрезком. Во втором случае можно построить прямоугольный треугольник с гипотенузой $2a$ и катетом a, тогда другой катет будет искомым.

Эту задачу хочется обобщить, то есть научиться по заданному отрезку длины a строить любой отрезок длины $a\sqrt{m}$, где m — натуральное число. Конечно, можно для каждого конкретного значения m искать способ представления его квадрата в виде суммы или разности квадратов натуральных чисел, можно также использовать идею последовательного построения нескольких прямоугольных треугольников по двум сторонам, но существует и более общий метод.

Рассмотрим вспомогательную задачу.

Пример 1. Постройте прямоугольный треугольник, если даны проекции его катетов на гипотенузу.

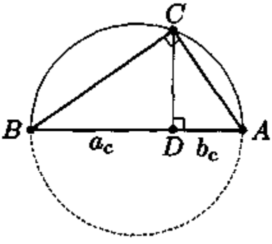


Рис. 1

Решение. Пусть ABC — искомый треугольник, CD — его высота, опущенная на гипотенузу, тогда $BD = a_c$ и $AD = b_c$ — данные проекции катетов на гипотенузу (см. рис. 1).

Решение задачи очень похоже на уже известное нам построение прямоугольного треугольника по гипотенузе и проведённой к ней высоте (см. пример 1 занятия 2).

Действительно, нетрудно построить гипотенузу AB искомого треугольника и точку D на ней, последовательно отложив на одном луче заданные отрезки. Тогда вершина C будет являться пересечением перпендикуляра к отрезку AB в точке D и окружности с диаметром AB.

Как использовать найденное построение? Заметим, что высота CD построенного треугольника является **средним геометрическим (средним пропорциональным)** проекций катетов на гипотенузу, то есть $CD = \sqrt{a_c b_c}$ (это следует из рассмотрения тангенсов острых углов A и B в прямоугольных треугольниках ACD и BCD соответственно или из подобия этих же треугольников). Тогда, учитывая, что $a\sqrt{m} = \sqrt{a^2 m} = \sqrt{(ma)a}$, мы сможем свести построение отрезка $a\sqrt{m}$ к построению высоты прямоугольного треугольника, у которого проекции катетов на гипотенузу равны ma и a!

Обратите внимание, что такое построение возможно не только для произвольного натурального числа m, но и для произвольного рационального числа.

Далее, мы теперь сможем построить острые углы, у которых любая тригонометрическая функция выражается числом вида $\frac{p\sqrt{m}}{q\sqrt{n}}$, где p, q, m и n — натуральные числа (естественно, что для синуса и косинуса должно действовать ограничение $0 < \frac{p\sqrt{m}}{q\sqrt{n}} < 1$). Для этого опять-таки достаточно построить прямоугольный треугольник со сторонами $p\sqrt{m}a$ и $q\sqrt{n}a$, где a — произвольный отрезок. Понятно, что если задан тангенс угла, то треугольник строится по двум катетам, а если задан синус или косинус, то он строится по катету и гипотенузе.

Более того, используя метрические соотношения, можно решать задачи на построение некоторых углов, которые чисто геометрическими методами решить очень трудно.

Пример 2. Постройте угол величины 36°.

Решение. Рассмотрим равнобедренный треугольник AOB, в котором $AO = OB = R$, $\angle AOB = 36°$ (см. рис. 2). Углы при основании этого треугольника равны по 72°. Проведём биссектрису AK, тогда $\angle OAK = \angle BAK = 36°$, $\angle AKB = 72°$. Следовательно, $OK = AK = AB$.

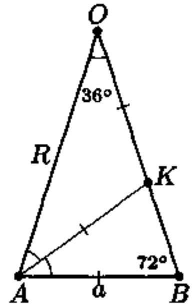


Рис. 2

По свойству биссектрисы треугольника (или из подобия треугольников AOB и BAK) получим: $\frac{OA}{AB} = \frac{OK}{BK}$. Пусть $AB = a$, тогда $\frac{R}{a} = \frac{a}{R-a} \Leftrightarrow a^2 + Ra - R^2 = 0$. Это квадратное уравнение имеет один положительный корень: $a = \frac{R(\sqrt{5}-1)}{2}$.

Таким образом, решение задачи сведётся к выбору произвольного отрезка длины R («единицы измерения») и построению равнобедренного треугольника с боковой стороной R и основанием $a = \frac{R(\sqrt{5}-1)}{2}$. Угол при вершине построенного треугольника будет искомым.

Отметим, что построение углов с заданной градусной мерой тесно связано с построением правильных n-угольников с помощью циркуля и линейки, поскольку такое построение можно всегда свести с построению центрального угла окружности с заданным радиусом R, имеющего градусную меру $\frac{360^\circ}{n}$. Например, умея строить угол 60°, мы тем самым можем построить правильный шестиугольник, а научившись строить угол 36° — правильный десятиугольник.

*О том, какие правильные многоугольники можно построить циркулем и линейкой — **см. Приложения.***

В заключение добавим, что приведённое построение угла 36° одновременно является и построением **золотого сечения** данного отрезка. **Золотое сечение** отрезка — это такое его разбиение на две части, при котором длина отрезка относится к большей части, как большая часть к меньшей.

В примере 2 точка K делит отрезок OB именно в таком отношении (это следует из пропорции, составленной по ходу решения). Поэтому, построив указанным образом треугольник AOB, для построения золотого сечения отрезка OB достаточно построить биссектрису AK (см. рис. 2).

Задачи

Задача 1. Даны отрезки длины a, b и c. Постройте отрезок длины x, если $\frac{x}{a} = \frac{b}{c}$.

Задача 2. Дан отрезок длины 1. Постройте отрезки длины: а) $x = \sqrt{13}$; б) $y = \sqrt{3\sqrt{5}}$; в) $z = \frac{2}{\sqrt{10}-2}$.

Задача 3. Постройте угол, синус которого равен $\frac{\sqrt[4]{7}}{\sqrt{6}}$.

Задача 4. Постройте правильный пятиугольник с заданной стороной a.

Задача 5. Постройте окружности с центрами в трёх данных точках, попарно касающиеся внешним образом.

Задача 6. Постройте треугольник по двум сторонам и биссектрисе, проведённой к третьей стороне.

Задача 7. Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе и биссектрисе, проведённой к одному из катетов.

Ответы и решения

1. Для построения искомого отрезка можно использовать, например, теорему о пропорциональных отрезках. Если на одной из сторон произвольного угла O отложить отрезок $OB = b$, а на другой стороне — отрезки $OC = c$ и $CA = a$, а затем через точку A провести прямую, параллельную BC, то эта прямая пересечёт луч OB в точке D так, что отрезок BD будет искомым (см. рис. 3).

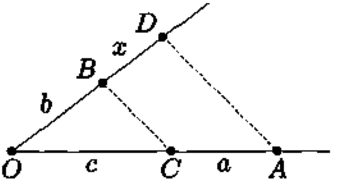


Рис. 3

Отметим, что такое построение называется **построением четвёртого пропорционального**, причём в роли отрезка x может выступать любой член пропорции.

2. а) Так как $\sqrt{13} = \sqrt{3^2 + 2^2}$, искомый отрезок x — гипотенуза прямоугольного треугольника с катетами 3 и 2.

Возможны и другие способы решения.

б) Сначала построим отрезок, равный $\sqrt{5}$. Это можно сделать по-разному, например, такую длину будет иметь гипотенуза прямоугольного треугольника с катетами 1 и 2 или катет прямоугольного треугольника с гипотенузой 3 и другим катетом 2.

Число $y = \sqrt{3\sqrt{5}}$ является средним геометрическим чисел 3 и $\sqrt{5}$, поэтому искомый отрезок y является высотой прямоугольного треугольника, в котором длины проекций катетов на гипотенузу равны 3 и $\sqrt{5}$ (см. пример 1).

в) $z = \frac{2}{\sqrt{10}-2} = \frac{2(\sqrt{10}+2)}{(\sqrt{10})^2-2^2} = \frac{\sqrt{10}+2}{3}$, поэтому решение задачи сведётся к построению отрезка длиной $\sqrt{10}$ одним из уже описанных способов.

3. Выберем произвольный отрезок длины a в качестве единицы измерения. Указанными выше способами построим отрезки $c = a\sqrt{6} = \sqrt{(2a)^2+(a\sqrt{2})^2}$, $d = a\sqrt{7} = \sqrt{(4a)^2-(3a)^2}$ и $b = a\sqrt[4]{7} = \sqrt{a \cdot a\sqrt{7}}$. Тогда в прямоугольном треугольнике с катетом b и гипотенузой c угол, противолежащий катету b, будет искомым.

Задача 8. Пусть искомый правильный пятиугольник построен. Тогда вокруг него можно описать окружность (см. рис. 4). Центральный угол этой окружности, опирающийся на сторону пятиугольника, равен $72^\circ = 2 \cdot 36^\circ$ (построение угла 36° — см. пример 2).

Таким образом, решение задачи сведётся к построению равнобедренного треугольника AOB с основанием a и углом 72° при вершине. Проведя затем окружность радиуса OA, и последовательно откладывая хорды длины a, получим остальные вершины искомого пятиугольника.

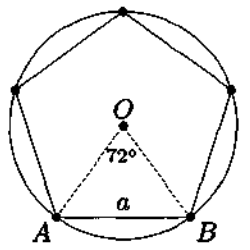


Рис. 4

4. Пусть такие окружности с центрами в данных точках A, B и C построены (см. рис. 5а). Исходя из условия, можно считать, что нам известны расстояния $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$.

Обозначим точки попарного касания окружностей M, K и P. Тогда $AK = AM = x$; $BM = BP = y$; $CK = CP = z$. Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} x+y=c, \\ x+z=b, \\ y+z=a. \end{cases}$$

Складывая их почленно, получим, что $x + y + z = \dfrac{a+b+c}{2} = p$. Тогда

$$\begin{cases} x = p - a, \\ y = p - b, \\ z = p - c, \end{cases}$$

причём $x > 0$, $y > 0$ и $z > 0$, то есть радиусы окружностей однозначно определяются расстояниями между заданными точками.

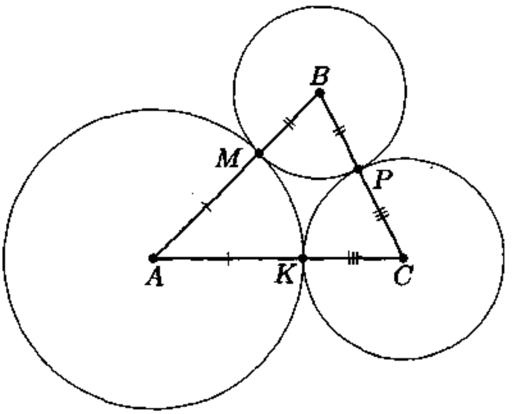


Рис. 5а

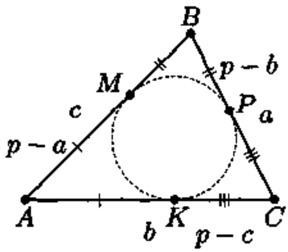


Рис. 5б

Следовательно, решение задачи сводится к построению отрезков с найденными длинами x, y и z, после чего строятся окружности с центрами в заданных точках и найденными радиусами.

Задача имеет единственное решение, если точки A, B и C образуют треугольник, то есть не лежат на одной прямой.

Отметим, что найденные значения радиусов искомых окружностей позволяют осуществить построение и по-другому. Полученные отрезки x, y и z равны расстояниям от вершин треугольника ABC до точек касания вписанной в этот треугольник окружности с его сторонами. Поэтому решение задачи можно свести к построению треугольника с вершинами в заданных точках и вписанной в него окружности, тогда полученные расстояния от вершин треугольника до точек касания будут являться радиусами искомых окружностей (см. рис. 5б).

Полезно также обратить внимание учащихся на связь между этой задачей и задачей 5 занятия 2.

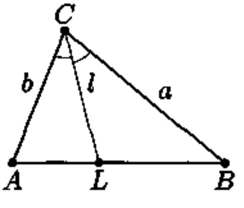


Рис. 6

5. Пусть искомый треугольник ABC со сторонами $BC = a$, $AC = b$ и биссектрисой $CL = l$ построен (см. рис. 6). Используем формулу для вычисления биссектрисы: $l = \frac{2ab}{a+b}\cos\frac{\gamma}{2}$, где $\angle ACB = \gamma$. Тогда $\cos\frac{\gamma}{2} = \frac{l(a+b)}{2ab}$.

Построение угла с полученным косинусом можно осуществить в два этапа:

1) построим отрезок $x = \frac{l(a+b)}{a}$ (используя **построение четвёртого пропорционального**);

2) построим угол, косинус которого равен $\frac{x}{2b}$.

Далее, «удвоив угол», построим искомый треугольник ABC по двум сторонам и углу между ними.

Из приведённых рассуждений следует также, что задача имеет решение, если $0 < l < \frac{2ab}{a+b}$, причём оно единственное.

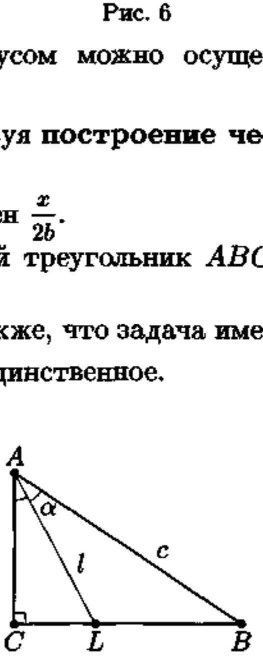


Рис. 7

6. Пусть искомый треугольник ABC с прямым углом C построен, $AB = c$, биссектриса AL имеет длину l (см. рис. 7). Обозначим: $\angle CAL = \angle BAL = \alpha$, тогда $\angle ABC = 90° - 2\alpha$, $\angle ALB = 90° + \alpha$. Из треугольника ALB по теореме синусов получим, что $\frac{AL}{\sin\angle ABC} = \frac{AB}{\sin\angle ALB}$, то есть $\frac{l}{\sin(90° - 2\alpha)} = \frac{c}{\sin(90° + \alpha)}$. Преобразуем полученное равенство, учитывая, что $\sin(90° + \alpha) = \cos\alpha$ и $\sin(90° - 2\alpha) = \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$. Получим уравнение: $2c\cos^2\alpha - l\cos\alpha - c = 0$. Сделав замену $\cos\alpha = x$, получим квадратное уравнение, корни которого $x = \frac{l \pm \sqrt{l^2 + 8c^2}}{4c}$. Учитывая, что α — острый угол, получим: $\cos\alpha = \frac{l + \sqrt{l^2 + 8c^2}}{4c}$.

Таким образом, решение задачи сводится к построению угла с найденным косинусом, дальнейшему построению вспомогательного треугольника ALB по двум сторонам и углу между ними и его достраиванию до искомого треугольника, способ которого очевиден.

Приведённые рассуждения показывают, что более одного решения задача иметь не может. Для того чтобы это решение существовало, необходимо и достаточно выполнения неравенств: $l > 0$, $c > 0$ и $\frac{l+\sqrt{l^2+8c^2}}{4c} < 1$. При $c > 0$ последнее неравенство равносильно:

$$\sqrt{l^2+8c^2} < 4c - l \Leftrightarrow \begin{cases} l < 4c, \\ l^2+8c^2 < 16c^2 - 8cl + l^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} l < 4c, \\ l < c. \end{cases}$$

Окончательно получим, что при $0 < l < c$ решение есть, причём единственное.

Отметим также, что можно было составлять уравнение, используя свойство биссектрисы треугольника и теорему Пифагора (для каждого из двух прямоугольных треугольников), но такое решение более громоздко.

К теме данного занятия также относятся задачи 1п, р, 2д, е, 7, 8, 14д, 15е, 20а, *б*, 21–23, 43, 71 из раздела «*Задачи для самостоятельного решения*».

Занятие 5

Применение движений к решению задач на построение

На этом занятии будет рассмотрено применение различных видов **движений** при решении задач на построение.

Рассмотрение вопросов о количестве решений той или иной задачи оставляем на усмотрение преподавателя.

Напомним, что **движением** мы называем преобразования плоскости, **сохраняющие расстояния** между точками. Существуют четыре основных вида **движений на плоскости: центральная и осевая симметрии**, **параллельный перенос** и **поворот**. Напомним также, что **композиция движений** также **является движением**.

Использование движений прежде всего уместно в задачах, связанных с «восстановлением» каких-либо фигур, про которые известно (из условия задачи), что некоторые их точки принадлежат другим заданным фигурам.

Прежде чем сформулировать суть рассматриваемого метода, уместно рассмотреть несколько примеров.

Пример 1. Постройте отрезок заданной длины a, параллельный данной прямой c, концы которого лежат на данной прямой m и на данной окружности с центром O (данные прямая m и окружность не пересекаются).

Решение. Предположим, что искомый отрезок AB построен (точка A лежит на окружности, точка B — на прямой m, см. рис. 1). Заметим, что точка B является образом точки A при параллельном переносе на вектор длины a, который параллелен прямой c.

Тогда, так как A принадлежит данной окружности, B должна принадлежать образу этой окружности при указанном параллельном переносе. С другой стороны, точка B принадлежит прямой m, поэтому должна принадлежать пересечению этой прямой и образа окружности.

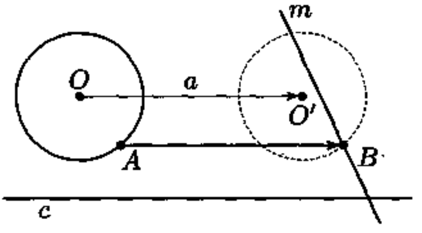


Рис. 1

Таким образом, решение задачи сводится к построению образа данной окружности при параллельном переносе на вектор заданной длины a и параллельный прямой c (для этого достаточно построить точку O' — образ центра O заданной окружности при этом параллельном переносе). Искомая точка B — пересечение прямой m и полученной окружности с центром O'. Выполнив затем параллельный перенос на противоположный вектор, получим точку A, AB — искомый отрезок.

Количество решений задачи зависит от количества точек пересечения образа окружности и прямой и определяется взаимным расположением заданных прямых и окружности (в некоторых случаях и величиной a).

Отметим, что фигуры, которым принадлежат концы искомого отрезка, могли быть и другими, при этом способ решения задачи не меняется.

Пример 2. Постройте отрезок с серединой в данной точке O и концами на двух заданных фигурах F и F_1.

Решение. Предположим, что искомый отрезок AB построен (см. рис. 2). Заметим, что точки A и B симметричны относительно точки O. Так как точка A принадлежит фигуре F, то точка B должна принадлежать образу F' этой фигуры при симметрии с центром O. С другой стороны, точка B принадлежит фигуре F_1, поэтому должна принадлежать пересечению фигур F_1 и F'.

Таким образом, решение задачи сводится к построению образа F' фигуры F при симметрии относительно O. Искомая точка B — пересечение фигуры F_1 и F'. Точка A — образ полученной точки B при той же симметрии, AB — искомый отрезок.

Количество решений задачи определяется количеством точек пересечения фигур F_1 и F' и зависит от взаимного расположения заданных точки O и фигур F и F_1.

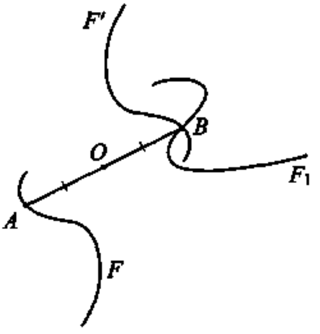


Рис. 2

Теперь можно попробовать сформулировать суть рассматриваемого метода. Если требуется построить фигуру Φ, у которой какая-то точка X принадлежит заданной фигуре F, а другая точка Y — заданной фигуре F_1 (но сами эти точки не даны), то из предположения, что искомая фигура Φ построена, выявляется движение, при котором образом точки X является точка Y. Тогда решение задачи сводится к построению точки Y методом ГМТ: она принадлежит фигуре F_1 и фигуре F' — образу фигуры F при найденном движении, следовательно, Y принадлежит пересечению фигур F_1 и F'.

В примере 1: Φ — искомый отрезок, F — данная окружность, F_1 — прямая m, выявленное движение — перенос параллельно прямой c на расстояние a.

В примере 2 ситуация аналогична, но используется другое движение — симметрия с центром O.

Пример 3. Постройте треугольник по серединам двух его сторон и прямой, содержащей биссектрису, проведённую к третьей стороне.

Решение. Пусть даны точки K и M и прямая l. Предположим, что искомый треугольник ABC, в котором K — середина AB, M — середина BC, а биссектриса, проведённая из вершины B, лежит

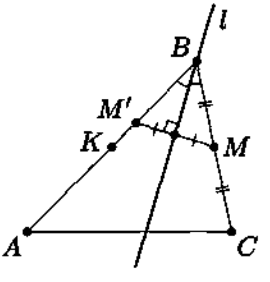


Рис. 3

на прямой l, построен (см. рис. 3). Заметим, что так как стороны угла симметричны относительно его биссектрисы, то образы точек M и K при симметрии с осью l также лежат на сторонах угла ABC.

Таким образом, решение задачи сводится к построению, например, точки M' — образа точки M при симметрии относительно прямой l, и проведению прямой $M'K$. Точка B — пересечение прямых $M'K$ и l. Точки A и C — образы точки B при симметриях относительно точек K и M соответственно. Треугольник ABC — искомый.

Задача имеет бесконечно много решений, если точки M и K симметричны относительно прямой l, и не имеет решений, если точки M и K заданы так, что прямые $M'K$ и l не пересекаются. Последнее условие равносильно тому, что точки M и K равноудалены от прямой l.

Пример 4. Постройте квадрат, три вершины которого принадлежат трём заданным параллельным прямым.

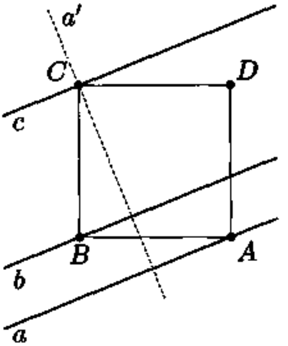


Рис. 4

Решение. Пусть a, b и c — заданные параллельные прямые. Предположим, что искомый квадрат $ABCD$, вершины A, B и C которого лежат на прямых a, b и c соответственно, построен (см. рис. 4).

Заметим, что при повороте с центром B на угол $90°$ образом точки A является точка C. Следовательно, точка C лежит на прямой a' — образе прямой a при указанном повороте. Помимо этого, точка C принадлежит прямой c, значит, она является пересечением прямых c и a'.

Таким образом, решение задачи сводится к выбору произвольной точки B на прямой b и построению прямой a', которая является образом прямой a при повороте с центром B на $90°$. C — точка пересечения прямых c и a'. Дальнейшее построение квадрата очевидно.

Задача всегда имеет решение, так как при любом расположении данных параллельных прямых прямые a' и c пересекаются (они перпендикулярны). Так как точка B — произвольная точка прямой b, то можно построить бесконечно много равных между собой квадратов, удовлетворяющих условию задачи.

Кроме того, следует отметить, что квадраты данной серии не исчерпывают всех решений. Можно, например, построить квадрат, в котором **противоположные вершины** лежат на прямых a и b. Такой квадрат, вообще говоря, не будет равен квадратам, построение которых описано.

Подчеркнём отдельно, что во всех разобранных примерах в неявном виде применялось следующее утверждение, справедливое для любых **взаимно однозначных отображений** (в частности, для **движений**): **образ пересечения фигур совпадает с пересечением их образов.** Доказательство этого факта можно найти, например, в [14].

Основная трудность при решении задач рассмотренным методом — правильно выбрать **движение**, помогающее решить задачу. В тех случаях, когда решение задачи связано с построением какого-либо отрезка заданной длины, параллельного заданной прямой (то есть фактически требуется построить **направленный отрезок или вектор**, см. пример 1), часто выручает **параллельный перенос**. Во многих случаях такие задачи возникают при рассмотрении параллелограмма или трапеции.

В примере 2 «напрашивалась» **центральная симметрия**, так как искомая фигура являлась центрально-симметричной. Поэтому **центральная симметрия** часто помогает при построении параллелограмма или окружности с заданными центрами.

Аналогично, если искомая фигура имеет ось симметрии, то при её построении может помочь **симметрия относительно прямой**. Это часто происходит при построении окружности (если задан диаметр), угла (при заданной биссектрисе, см. пример 3), отрезка (если задан серединный перпендикуляр), равнобедренного треугольника, ромба, равнобокой трапеции и пр.

В конструкциях, связанных с квадратами, помимо обеих симметрий часто применяется **поворот** на $90°$, центр которого может быть как в вершине квадрата (см. пример 4), так и в точке пересечения его диагоналей.

В заключение — вопрос. При построении каких ещё фигур также часто применяется повороты? Укажите возможные центры и углы таких поворотов и обоснуйте.

[Правильный n-угольник, так как при повороте вокруг его центра на углы, кратные $\frac{360°}{n}$, его вершины переходят друг в друга. В частности, при построении равностороннего треугольника часто используется поворот вокруг его центра на 120°. Кроме того, при построении равностороннего треугольника можно использовать и поворот вокруг одной из вершин на 60°].

Задачи

Задача 1. Постройте параллелограмм $ABCD$ по двум заданным вершинам A и B, если две другие его вершины принадлежат данной окружности.

Задача 2. Постройте ромб с центром в данной точке и тремя вершинами, лежащими на трёх заданных прямых.

Задача 3. Постройте квадрат с центром в данной точке так, чтобы середины двух его соседних сторон принадлежали двум заданным прямым.

Задача 4. Постройте равносторонний треугольник с вершиной в данной точке так, чтобы две другие вершины принадлежали данной прямой и данной окружности.

Задача 5. Постройте равносторонний треугольник с центром в данной точке так, чтобы две его вершины принадлежали двум заданным фигурам.

Задача 6. Постройте треугольник ABC, если даны прямая, на которой лежит сторона AB, и серединные перпендикуляры к сторонам AC и BC.

Ответы и решения

1. Пусть искомый параллелограмм $ABCD$, вершины C и D которого лежат на данной окружности с центром O, построен (см. рис. 5). Заметим, что точка C является образом точки D при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{AB}$. Кроме того, точки C и D принадлежат окружности с центром O. Следовательно, точка C принадлежит пересечению этой окружности и её образа при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{AB}$.

Таким образом, решение задачи сводится к построению образа данной окружности при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{AB}$ (для этого достаточно построить точку O' — образ точки O). Пусть C — точка пересечения окружностей с центрами O и O'. Выполнив затем параллельный перенос на вектор $\overrightarrow{BA}$, получим точку D, $ABCD$ — искомый параллелограмм.

Количество решений задачи в точности равно количеству точек пересечения двух окружностей (два, одно или ни одного, в зависимости от взаимного расположения заданных точек A и B и окружности с центром O).

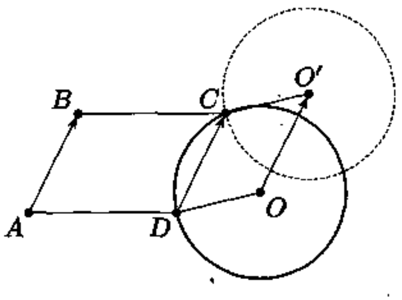


Рис. 5

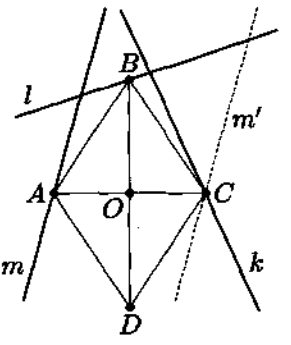


Рис. 6

2. Пусть ромб $ABCD$ с центром в данной точке O и вершинами A, B и C, лежащими на прямых m, l и k соответственно, построен (см. рис. 6). Заметим, что точка C является образом точки A при симметрии с центром O. Поэтому точка C может быть получена пересечением прямой m' — образа прямой m при указанной симметрии и прямой k. Дальнейшее построение очевидно.

Количество решений задачи (ни одного, одно или бесконечно много) зависит от взаимного расположения заданных прямых и точки O.

3. Пусть квадрат $ABCD$ с центром O, у которого середины M и K сторон AB и BC лежат на заданных прямых m и k

соответственно, построен (см. рис. 7). Заметим, что точка M является образом точки K при повороте с центром O на угол $90°$. Поэтому эта точка может быть получена пересечением прямой k' — образа прямой k при указанном повороте и прямой m. Дальнейшее построение очевидно.

Количество решений (ни одного, одно или бесконечно много) зависит от взаимного расположения заданных прямых и точки O.

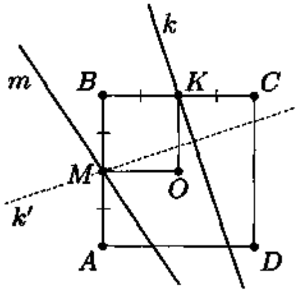


Рис. 7

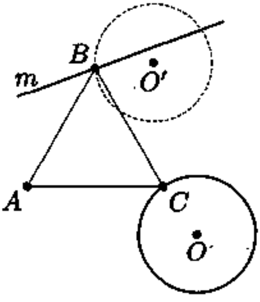


Рис. 8

4. Пусть даны точка A, прямая m и окружность с центром O. Предположим, что равносторонний треугольник ABC, у которого вершина B лежит на прямой m, а вершина C — на данной окружности, построен (см. рис. 8). Заметим, что точка B является образом точки C при повороте с центром A на угол $60°$. Поэтому точка B может быть получена пересечением образа данной окружности при этом повороте и прямой m (построение образа окружности сведётся к построению точки O' — образа точки O при повороте с центром A на угол $60°$). Дальнейшее построение очевидно.

Количество решений (ни одного, одно или два) определяется количеством точек пересечения прямой m и окружности с центром O' и зависит от взаимного расположения заданных точки A, прямой m и окружности с центром O.

5. Пусть на плоскости заданы точка O и фигуры F и F_1. Предположим, что равносторонний треугольник ABC с центром O, у которого вершины A и B принадлежат фигурам F и F_1 соответственно, построен (см. рис. 9). Заметим, что точка B

является образом точки A при повороте с центром O на угол $120°$. Следовательно, точка B может быть получена пересечением фигур F_1 и F' — образа фигуры F при указанном повороте. Дальнейшее построение очевидно.

Количество решений определяется количеством точек пересечения фигур F_1 и F' и зависит от взаимного расположения заданных точки O и фигур F и F_1.

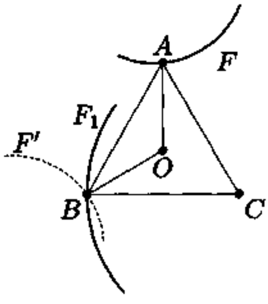


Рис. 9

6. Пусть заданы прямые c, k и m. Предположим, что искомый треугольник ABC, сторона AB которого лежит на прямой c, а прямые k и m являются серединными перпендикулярами к сторонам AC и BC соответственно, построен (см. рис. 10).

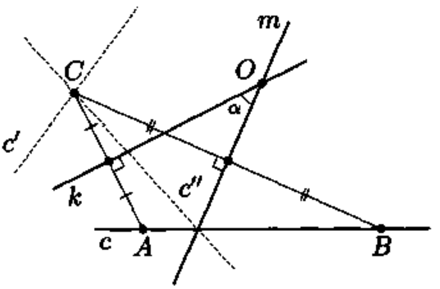


Рис. 10

Заметим, что точка C является образом точки A при симметрии относительно прямой k. Аналогично, точка C — образ точки B при симметрии относительно прямой m. Следовательно, точка C является пересечением прямой c' — образа прямой c при симметрии с осью k и прямой c'' — образа прямой c при симметрии с осью m. Дальнейшее построение очевидно.

Если данные прямые k и m пересекаются, то пересекаются прямые c' и c'', то есть задача имеет одно решение, в противном случае решений нет.

Отметим, что возможен другой способ построения, использующий следующий факт: **композицией двух симметрий с пересекающимися осями**

является поворот с центром в точке пересечения осей на удвоенный угол между осями (подробнее — см., например, [1], [5], [14] или [16]). Действительно, композиция осевых симметрий относительно прямых k и m переводит точку A в точку B. Пусть прямые k и m, угол между которыми равен α, пересекаются в точке O (см. рис. 10). Тогда точка B является образом точки A при повороте с центром O на угол 2α (в данном случае — по часовой стрелке). Следовательно, точка B может быть получена пересечением прямой c и её образа при указанном повороте.

Этот же способ построения может быть получен из других соображений. Заметим, что точка O пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника является центром окружности, описанной около этого треугольника, а угол α между этими перпендикулярами равен углу ACB, который вписан в эту окружность. Тогда центральный угол AOB этой окружности равен 2α.

К теме данного занятия также относятся задачи 18е, 19б, ж, 28–35, 38–40, 52, 58б, 61, 62 из раздела «*Задачи для самостоятельного решения*».

Занятие 6

Построение треугольников и четырёхугольников с помощью движений

На этом занятии мы рассмотрим применение движений к традиционным задачам на построение треугольников и четырёхугольников по заданным элементам.

В таких задачах движения, как правило, помогают увидеть дополнительные построения, позволяющие найти вспомогательные треугольники или сводящие задачу к уже решённой. Отметим, что в предыдущих занятиях встречались задачи, при решении которых мы в «неявном виде» использовали **движения**, проводя некоторые дополнительные построения. Например, в задаче 3в занятия 1 во втором случае мы практически использовали, что вспомогательная точка D симметрична вершине B относительно середины M стороны AC. В примере 2 и в задаче 3 занятия 3 также «неявно» использована центральная симметрия, а можно было использовать и параллельный перенос (подумайте, как?)

Рассмотрим другие примеры, условившись в большинстве случаев (для экономии времени) не проводить исследований.

Пример 1. Постройте треугольник по двум сторонам и разности противолежащих им углов.

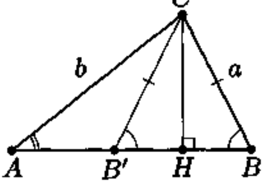


Рис. 1

Решение. Пусть искомый треугольник ABC, в котором $BC = a$, $AC = b$, $\angle B - \angle A = \alpha$, построен (см. рис. 1). Проведём высоту CH и рассмотрим точку B', симметричную вершине B относительно прямой CH. Тогда $B'C = BC =$

$= a$; $\angle CB'H = \angle CBH$, поэтому $\angle ACB' = \angle CB'H - \angle CAB = \alpha$. Таким образом, на чертеже образовался **вспомогательный треугольник** $AB'C$, который можно построить по двум сторонам и углу между ними. Вершина B искомого треугольника — вторая точка пересечения прямой AB' с окружностью с центром C и радиусом CB'.

Отметим, что способ построения не зависит от вида угла ABC.

Отметим также, что в задачах на построение с данной разностью углов очень часто используется осевая симметрия.

Пример 2. Постройте выпуклый четырёхугольник по четырём сторонам и отрезку, соединяющему середины двух противолежащих сторон.

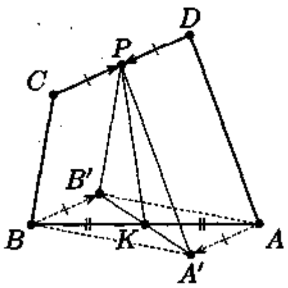


Рис. 2а

Решение. Предположим, что искомый четырёхугольник $ABCD$ с заданными сторонами, в котором точки K и P — середины сторон AB и CD соответственно, построен (см. рис. 2а, б).

Первый способ. Пусть A' и B' — образы точек A и B при параллельных переносах на вектора $\overrightarrow{DP}$ и $\overrightarrow{CP}$ соответственно (см. рис. 2а). Так как $AA'BB'$ — параллелограмм, точка K — середина отрезка $A'B'$. Так как $PA' = DA$, $PB' = CB$, на чертеже образовался **вспомогательный треугольник** $A'PB'$, в котором известны две стороны и медиана, проведённая к третьей стороне. Таким образом, задача свелась к уже решённой (см. задачу 3в занятия 1). Дальнейшее построение включает в себя построение треугольников $BB'K$ и $AA'K$ по трём сторонам, после чего искомый четырёхугольник восстанавливается очевидным образом.

Отметим, что идею использования параллельного переноса может подсказать знание векторного равенства $\overrightarrow{PK} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DA}\right)$ (в выбранных обозначениях). Его можно доказывать различными способами (см., например, [1], [5], [14] или [16]), но один из возможных способов доказательства легко восстанавливается по рис. 2а: равенства двух пар векторов $\overrightarrow{PB'} =$

$= \overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{PA'} = \overrightarrow{DA}$ сводят доказываемое равенство к известному векторному равенству в треугольнике $A'PB'$: $\overrightarrow{PK} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{PA'} + \overrightarrow{PB'}\right)$, где K — середина $A'B'$ (так как $AB'BA'$ — параллелограмм).

Тем самым можно в очередной раз подчеркнуть связь между геометрическими задачами «на построение» и «на доказательство».

Второй способ. Пусть A' — образ точки A при симметрии с центром P (см. рис. 2б). Тогда $A'C = AD$ и $BA' = 2KP$. Следовательно, на чертеже образовался **вспомогательный треугольник** $A'BC$, который можно построить по трём известным сторонам. Достроив его до параллелограмма $BEA'C$, получим, что $ABED$ также параллелограмм. Тогда в треугольнике ECD известны три стороны, что позволяет построить точку D. Дальнейшее построение очевидно.

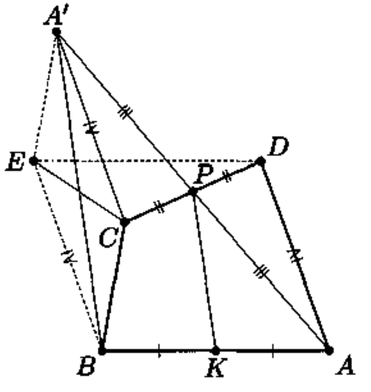


Рис. 2б

Отметим, что использованное при решении достроение треугольника до параллелограмма (так же как и продление медианы на её длину) по сути является применением центральной симметрии.

Задачи

Задача 1. Постройте трапецию: а) по основаниям и диагоналям; б) по основаниям и боковым сторонам.

Задача 2. Даны две непересекающиеся окружности. Постройте их общую касательную: а) внешнюю; б) внутреннюю.

Задача 3. Постройте выпуклый четырёхугольник по двум противолежащим сторонам и трём углам.

Задача 4. Постройте выпуклый четырёхугольник $ABCD$, у которого диагональ AC принадлежит биссектрисе угла A, если даны все стороны четырёхугольника.

Задача 5. Постройте треугольник по стороне, проведённой к ней высоте и разности углов, прилежащих к данной стороне.

Задача 6. Постройте треугольник по медианам, проведённым к двум сторонам, и углу, противолежащему третьей стороне.

Ответы и решения

1. Пусть искомая трапеция $ABCD$ ($AD \parallel BC$) построена.

а) Рассмотрим параллельный перенос на вектор $\overrightarrow{BC}$: образом точки D будет являться точка D', лежащая на луче AD, тогда отрезок CD' — образ диагонали BD (см. рис. 3а). Так как $CD' = BD$, $AD' = AD + BC$, на чертеже образовался вспомогательный треугольник ACD', который можно построить по трём сторонам. Выполнив затем параллельный перенос на вектор, противоположный $\overrightarrow{BC}$, получим вершины B и D.

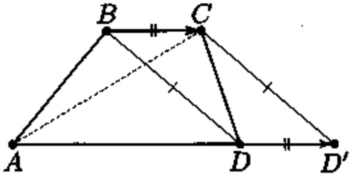


Рис. 3а

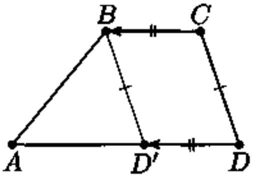


Рис. 3б

б) Рассмотрим параллельный перенос на вектор $\overrightarrow{CB}$: образом точки D будет являться точка D', лежащая на луче DA, тогда отрезок BD'— образ стороны CD (см. рис. 3б). Так как $BD' = CD$, $AD' = AD - BC$, на чертеже образовался вспомогательный треугольник ABD', который можно построить по трём сторонам. Выполнив затем параллельный перенос на вектор, противоположный $\overrightarrow{CB}$, получим вершины C и D.

2. Пусть даны две окружности с центрами O и O_1 и радиусами R и r соответственно. Предположим, что искомая общая касательная AB построена (см. рис. 4а, б).

а) Заметим, что $OABO_1$ — прямоугольная трапеция, в которой известны большая боковая сторона OO_1 и основания $OA = R$, $O_1B = r$. Её построение осуществляется с помощью параллельного переноса на вектор $\overrightarrow{BO_1}$, при котором A' — образ точки A (см. рис. 4а). Тем самым решение задачи сводится к построению вспомогательного прямоугольного треугольника OO_1A' по гипотенузе OO_1 и катету $OA' = R - r$.

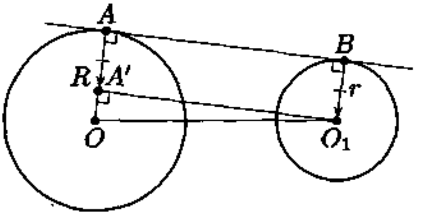


Рис. 4а

б) Рассмотрим аналогичный параллельный перенос на вектор $\overrightarrow{BO_1}$, при котором A' — образ точки A (см. рис. 4б). Тогда решение задачи сведётся к построению вспомогательного прямоугольного треугольника OO_1A' по гипотенузе OO_1 и катету $OA' = R + r$.

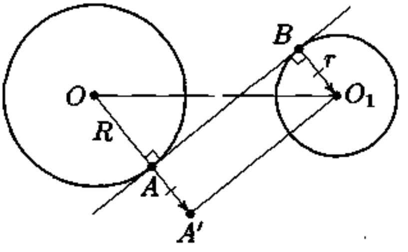


Рис. 4б

Отметим, что в каждом из рассмотренных случаев можно построить ровно две общие касательные, симметричные относительно прямой OO_1.

Решение пункта а) не изменится и в случае касающихся внешним образом или пересекающихся окружностей. Очевидно, что у пересекающихся окружностей нет общих внутренних касательных, так же как вообще нет общих касательных в случае, когда одна окружность целиком лежит внутри другой. Способы построения единственной общей касательной для случая внутреннего касания окружностей и второй общей касательной для случая их внешнего касания — очевидны.

Отметим также, что рассмотренный параллельный перенос позволяет интерпретировать решение, приведённое выше, и по-другому: проведя вспомогательную окружность с центром O и радиусом а) $R - r$ (см. рис. 4а); б) $R + r$ (см. рис. 4б), можно считать, что решение задачи сводится к уже известному построению касательной к этой окружности, проходящей через точку O_1, лежащей вне окружности (см. задачу 2 занятия 2).

3. Пусть искомый четырёхугольник $ABCD$, в котором даны $AB = m$, $CD = n$ и какие-то три угла, построен (см. рис. 5). Можно считать, что четвёртый угол четырёхугольника также известен (сумма углов четырёхугольника равна $360°$).

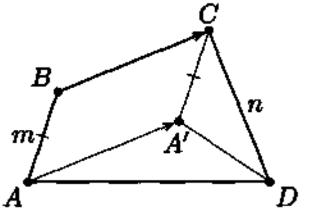


Рис. 5

Рассмотрим параллельный перенос на вектор $\overrightarrow{BC}$: пусть A' — образ точки A, тогда отрезок CA' — образ стороны BA. Таким образом, на чертеже образовался вспомогательный треугольник $A'CD$, в котором $CA' = m$, $CD = n$, $\angle A'CD = \angle BCD - \angle BCA' = \angle C - (180° - \angle B) = \angle C + \angle B - 180°$. Затем к этому треугольнику можно «пристроить» треугольник $AA'D$, поскольку $\angle AA'D = 360° - \angle AA'C - \angle DA'C = 360° - \angle B - \angle DA'C$, $\angle ADA' = \angle D - \angle A'DC$. Дальнейшее построение очевидно.

4. Пусть искомый четырёхугольник $ABCD$, в котором $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ и $DA = d$, построен (см. рис. 6). Рассмотрим симметрию с осью AC: так как (по условию) луч AC — биссектриса угла BAD, образом вершины B при этой симметрии является точка B', лежащая на лу-

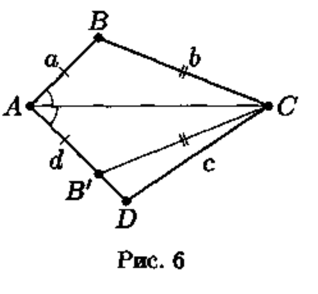


Рис. 6

че AD. Таким образом на чертеже образуется вспомогательный треугольник $B'CD$, в котором $CD = c$, $B'C = b$ и $B'D = |d - a|$. Дальнейшее построение очевидно.

5. Пусть искомый треугольник ABC, у которого $AB = c$, $|\angle A - \angle B| = \gamma$ и высота CD имеет длину h, построен (см. рис. 7). Пусть $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$ и, для определённости, $\alpha < \beta$. Рассмотрим прямую KM, проходящую через вершину C параллельно прямой AB. Пусть B' — образ вершины B при симметрии с осью KM, тогда $\angle ACB' = \angle ACK + \angle B'CK = \alpha + (180° - \beta) = 180° - \gamma$.

Таким образом, решение задачи сведётся к последовательному построению отрезка AB длины c, прямой KM (ГМТ, находящихся на заданном расстоянии h от прямой AB, — см. задачу 1а занятия 2) и точки B' — образа точки B при симметрии относительно KM. Тогда вершина C будет являться пересечением прямой KM и ГМТ, из которых отрезок AB' виден под углом $180° - \gamma$ (см. задачу 1б занятия 2).

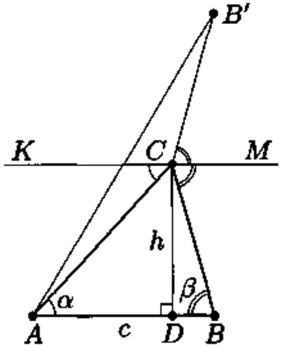


Рис. 7

Отметим, что первое из рассмотренных ГМТ состоит из двух прямых, причем выбор одной из них влияет только на расположение искомого треугольника. Второе из рассмотренных ГМТ состоит из двух дуг, симметричных относительно прямой AB'. Треугольники, соответствующие этим дугам, симметричны относительно серединного перпендикуляра к отрезку AB, поэтому в результате описанного построения реализуются оба случая: $\alpha < \beta$ и $\alpha > \beta$.

Идея применения симметрии относительно прямой KM может возникнуть, если сначала попробовать использовать симметрию относительно высоты CD (аналогично рассмотренному примеру 1), которая позволяет построить угол γ, но сразу не приводит к решению задачи.

6. Пусть искомый треугольник ABC, у которого $\angle ABC = \beta$, а длины медиан AA_1 и CC_1 равны m и n соответственно, построен (см. рис. 8). Пусть M — точка пересечения медиан треугольника ABC. Заметим, что отрезок AA_1 виден из вершины B под заданным углом β, следовательно, вершина B лежит на дуге окружности, стягиваемой хордой AA_1. Вершина C симметрична вершине B относительно точки A_1, поэтому она лежит на дуге, симметричной уже построенной дуге ABA_1 относительно точки A_1. С другой стороны, $AM = \frac{2}{3}m$, $CM = \frac{2}{3}n$, то есть, точка M делит отрезок AA_1 в известном отношении, а точка C удалена от точки M на заданное расстояние.

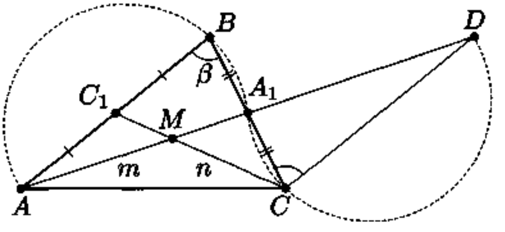


Рис. 8

Следовательно, решение задачи сводится к построению отрезка $AA_1 = m$ и ГМТ, из которых этот отрезок виден под углом β (см. задачу 1б занятия 2), после чего строится точка M. Вершина C искомого треугольника является пересечением образа одной из дуг построенного ГМТ при симметрии относительно точки A_1 и окружности с центром M и радиусом $\frac{2}{3}n$. Дальнейшее построение очевидно.

Отметим, что ту же идею можно реализовать и чуть-чуть по-другому: рассмотрим треугольник DCA_1, симметричный треугольнику ABA_1 относительно точки A_1. Тогда вершина C является пересечением дуги, из которой отрезок $DA_1 = m$ виден под заданным углом β, с окружностью с центром M и радиусом $\frac{2}{3}n$ (точка M лежит на луче DA_1 и $DM = \frac{4}{3}m$).

К теме данного занятия также относятся задачи 1о, р, 14а–г, е, 17а–в, 72 из раздела «Задачи для самостоятельного решения».

Занятие 7

Методы подобия и гомотетии

На этом занятии будет рассмотрено применение **преобразования подобия** для решения задач на построение.

Метод подобия основан на том, что при любом **преобразовании подобия сохраняются углы**, а **отношение длин любых соответствующих отрезков равно коэффициенту подобия**.

Заметим, что во многих задачах на построение все данные можно условно разделить на две части: 1) определяющие форму искомой фигуры; 2) определяющие её размеры. Например, углы треугольника определяют его форму, а стороны — размеры.

Метод подобия состоит в том, чтобы сначала, используя данные первого типа, построить фигуру нужной формы, а затем, используя данные второго типа, получить искомую фигуру, подобную построенной. Во второй части построения удобно, как правило, использовать **гомотетию**, центр которой выбирается исходя из удобства построения, а коэффициент равен отношению длин двух соответствующих линейных элементов в данной и в построенной фигурах.

В частности, в задачах на построение треугольников удобно использовать **признаки подобия треугольников**. Рассмотрим примеры.

Пример 1. *Постройте треугольник по двум углам и биссектрисе, проведённой из вершины третьего угла.*

Решение. Предположим, что искомый треугольник ABC, у которого $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, а биссектриса CD имеет заданную длину, построен (см. рис. 1). Заметим, что все треугольники с двумя фиксированными углами подобны (по I признаку), причём при любом преобразовании подобия, переводящем один из этих треугольников в другой, образом биссектрисы треугольника является биссектриса его образа, проведённая из соответствующей вершины.

Таким образом, решение задачи состоит из двух «блоков»:

1) построение треугольника $A'B'C$ по двум углам ($\angle A' = \alpha$, $\angle B' = \beta$) и построение его биссектрисы CD';

2) построение образа треугольника $A'B'C$ при гомотетии с центром C и коэффициентом $k = \dfrac{CD}{CD'}$.

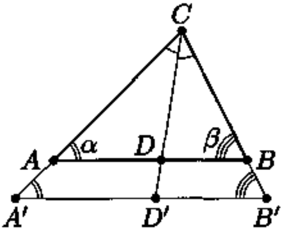


Рис. 1

Заметим, что если вместо биссектрисы задать другой линейный элемент (высоту, медиану, радиус вписанной или описанной окружности, периметр и пр.), то такие задачи можно решить аналогичным методом. В частности, это позволяет решить другим способом задачу, разобранную в примере 2 занятия 1, и задачу *3б* занятия 1.

Существенно ли в этих задачах, какие два угла искомого треугольника заданы? [Нет, но важно знать, какая из биссектрис, высот или медиан задана, а для радиуса или периметра и это не важно.]

Пример 2. Постройте треугольник по отношению двух сторон, углу между ними и медиане, проведённой из вершины данного угла.

Решение. Пусть искомый треугольник ABC, у которого $\dfrac{BC}{AC} = \dfrac{a}{b}$, $\angle C = \gamma$, а медиана CM имеет заданную длину, построен (см. рис. 2). Заметим, что все треугольники с фиксированным отношением двух сторон и заданным углом между ними подобны (по II признаку), причём при любом преобразовании подобия, переводящем один из этих треугольников в другой, обра-

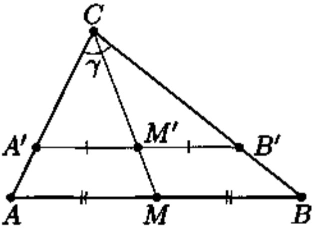


Рис. 2

зом медианы треугольника является медиана его образа, проведённая из соответствующей вершины.

Таким образом, решение задачи состоит из двух «блоков»:

1) построение треугольника $A'B'C$ по двум сторонам ($B'C = xa$, $A'C = xb$, где $x > 0$ — произвольный коэффициент пропорциональности) и построение его медианы CM';

2) построение образа треугольника $A'B'C$ при гомотетии с центром C и коэффициентом $k = \frac{CM}{CM'}$.

Отметим, что и в этой задаче вместо медианы мог быть задан любой другой линейный элемент.

Задачи на построение четырёхугольников сводятся, как правило, к задачам на построение треугольников.

Пример 3. Постройте параллелограмм $ABCD$ по диагонали AC, отношению высот, проведённых из вершины B, и углу между высотами.

Решение. Пусть искомый параллелограмм $ABCD$ построен, BK и BP — его высоты, O — точка пересечения диагоналей. Возможны два случая: $\angle ABC$ — тупой (см. рис. 3а) или $\angle ABC$ — острый (см. рис. 3б).

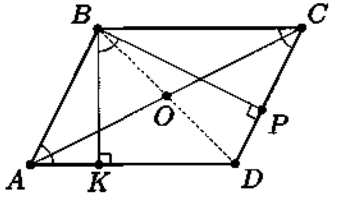


Рис. 3а

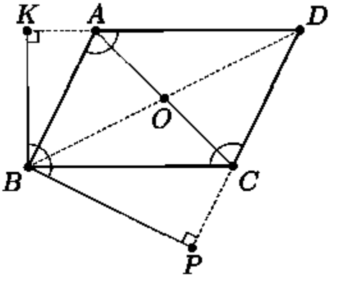


Рис. 3б

В обоих случаях $\angle DAB = \angle DCB = \angle KBP$ (см. пример 1 занятия 3), тогда $\triangle AKB \sim \triangle CPB$ (по I признаку), следовательно, $\frac{AB}{BC} = \frac{BK}{BP}$. Учитывая, что $AD = BC$, получим, что решение задачи сводится к построению треугольника ABD по отношению сторон AB и AD, углу между ними и медиане $AO = \frac{1}{2}AC$, проведённой к третьей стороне BD.

Отметим, что аналогичный способ решения можно было получить, используя подобие треугольников KBP и BAD.

В заключение рассмотрим пример применения **метода гомотетии**. Этот метод применяется чаще всего в тех случаях, когда требуется построить какой либо многоугольник, вписанный в данную фигуру. (Напомним, что многоугольник называется вписанным в фигуру F, если все его вершины лежат на границе этой фигуры.)

Суть **метода гомотетии** при решении таких задач состоит в том, чтобы сначала выполнить все условия, кроме одного (и получить тем самым некоторую «свободу» построения), а затем с помощью гомотетии обеспечить выполнение последнего условия.

Метод гомотетии основан на том, что, помимо выполнения всех свойств преобразования подобия, **при гомотетии любая точка, её образ и центр гомотетии лежат на одной прямой**. Часто используется также, что **при гомотетии образом любой прямой является прямая, ей параллельная или с ней совпадающая** (если исходная прямая проходит через центр гомотетии).

Пример 4. В данный остроугольный треугольник ABC впишите квадрат так, чтобы две его вершины находились на стороне AC и по одной вершине — на сторонах AB и BC.

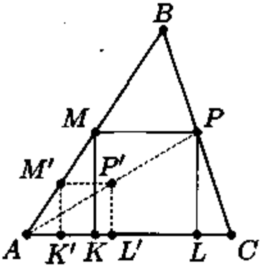


Рис. 4

Решение. Пусть искомый квадрат $MKLP$ построен (вершины K и L лежат на стороне AC, а вершины M и P — на сторонах AB и BC соответственно, см. рис. 4). Заметим, что любой квадрат $M'K'L'P'$, у которого вершины K' и L' лежат на стороне AC, вершина M' — на стороне AB, может быть получен из $MKLP$ гомотетией с центром A.

Таким образом, решение задачи сводится к построению любого из таких квадратов $M'K'L'P'$, после чего строится его образ при гомотетии, обратной к рассмотренной. Для этого достаточно провести луч AP' до пересечения со стороной BC в точке P. Дальнейшее построение можно быть основано как на том, что коэффициент этой гомотетии равен $\frac{AP}{AP'}$, так и на том, что стороны построенного и искомого квадратов соответственно параллельны.

Отметим, что можно было не требовать в условии задачи, чтобы треугольник ABC был остроугольным, но тупым или прямым в этом случае может быть только угол B, иначе задача не будет иметь решения.

Как обобщить рассмотренную задачу? [Аналогичным образом можно в треугольник вписать прямоугольник с любым заданным отношением сторон.]

В заключение отметим, что метод гомотетии является хорошей иллюстрацией более общей математической идеи решения конструктивных задач — метода «ослабления условия» (термин А. В. Шаповалова). При построении многих математических конструкций, удовлетворяющих нескольким *условиям*, удобно сначала отказаться от какого-то условия и построить пример на основе остальных условий, а затем довести его «до кондиции». Именно так мы поступили при решении задачи о вписании квадрата в треугольник (см. пример 4), отказавшись сначала от того, чтобы вершина квадрата лежала на стороне BC, а затем, используя гомотетию, получили решение задачи.

Аналогично при использовании метода подобия, мы сначала отказываемся от условия, определяющего размеры фигуры (см. примеры 1–3), а затем, используя признаки подобия треугольников, получаем искомую фигуру. Рассмотренный ранее метод ГМТ также можно в значительной степени отнести к методу «ослабления условия». В частности, в примере 1 занятия 2 вершина C искомого прямоугольного треугольника ABC является пересечением двух ГМТ: первое получается отказом от фиксированной высоты, а второе — отказом от прямого угла!

Задачи

Задача 1. Постройте прямоугольный треугольник по отношению катетов и гипотенузе.

Задача 2. Постройте треугольник по отношению трёх сторон и радиусу вписанной окружности.

Задача 3. Постройте параллелограмм по отношению диагоналей, углу между ними и высоте.

Задача 4. Постройте ромб, если даны радиус вписанной в него окружности и отношение стороны и диагонали.

Задача 5. Постройте трапецию по отношению оснований, высоте и углам, прилежащим к большему основанию.

Задача 6. На стороне BC данного треугольника ABC постройте такую точку M, что прямая, проходящая через основания перпендикуляров, опущенных из точки M на стороны AB и AC, параллельна BC.

Задача 7. Даны угол и точка внутри него. Постройте окружность, проходящую через заданную точку и касающуюся сторон угла.

Ответы и решения

1. Пусть искомый треугольник ABC, в котором $\angle C = 90°$, $AB = c$, $BC : AC = a : b$, построен (см. рис. 5). Заметим, что все прямоугольные треугольники с фиксированным отношением катетов подобны.

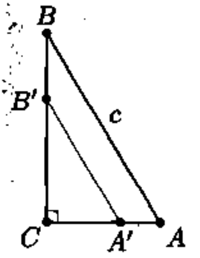


Рис. 5

Поэтому решение задачи сведётся к построению прямоугольного треугольника $A'B'C$, у которого отношение катетов $B'C : A'C = a : b$, после чего, например, выполняется гомотетия с центром C и коэффициентом $k = \frac{c}{A'B'}$.

2. Пусть искомый треугольник ABC, в котором $AB : BC : AC = c : a : b$, а радиус вписанной окружности равен r, построен (см. рис. 6).

Так как все треугольники с фиксированным отношением трёх сторон подобны (по III признаку), решение задачи сводится к построению треугольника $A'B'C'$ со сторонами xa, xb и xc ($x > 0$ — произвольный коэффициент пропорциональности) и радиуса r' его вписанной окружности. Искомый треугольник получается из построенного любым преобразованием подобия с коэффициентом $k = \frac{r}{r'}$, например, гомотетией с центром O и указанным коэффициентом k (O — центр окружности, вписанной в треугольник $A'B'C'$).

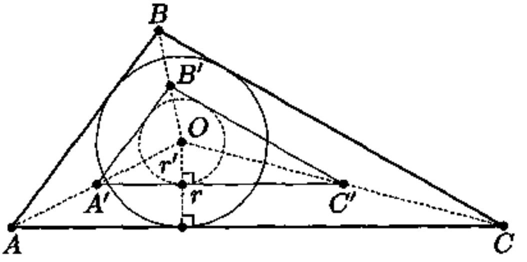


Рис. 6

3. Пусть искомый параллелограмм $ABCD$, в котором $\frac{AC}{BD} = \frac{c}{d}$, $\angle AOD = \varphi$ (O — точка пересечения диагоналей) и высота $BP = h$, построен (см. рис. 7). Рассмотрим **вспомогательный треугольник** AOD, в котором проведём высоту OH. Тогда $OH = \frac{1}{2}h$, $\frac{AO}{OD} = \frac{c}{d}$.

Таким образом, решение задачи сведётся к построению треугольника AOD по отношению двух сторон, углу между этими сторонами и высоте, проведённой к третьей стороне (см. пример 2). Достроение его до параллелограмма — очевидно.

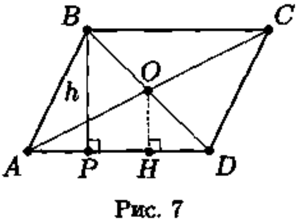


Рис. 7

Случай, когда вместо угла AOD задан ему смежный, очевидным образом сводится к уже рассмотренному.

4. Пусть искомый ромб $ABCD$, в котором $\frac{AB}{AC} = \frac{b}{c}$, O — точка пересечения диагоналей и радиус OK вписанной окружности равен r, построен (см. рис. 8). Рассмотрим **вспомогательный треугольник** ABC, в котором проведём высоту AH. Тогда $AH = 2r$, $AB : BC : CA = b : b : c$.

Таким образом, решение задачи сведётся к построению треугольника ABC по заданному отношению сторон и высоте, которое аналогично решению задачи 2. Достроение его до ромба — очевидно.

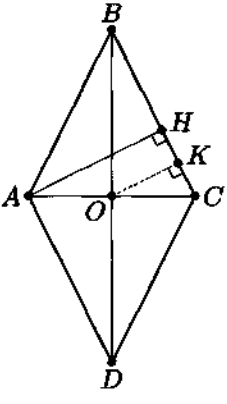


Рис. 8

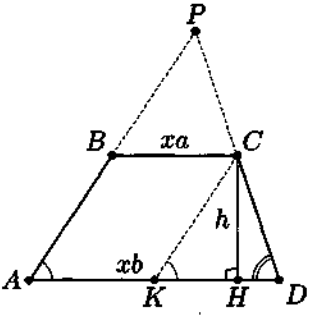


Рис. 9

5. Пусть искомая трапеция $ABCD$, в которой AD — большее основание, $\frac{BC}{AD} = \frac{a}{b}$, $\angle A = \alpha$, $\angle D = \beta$ и высота CH имеет длину h, построена (см. рис. 9). Продолжим её боковые стороны AB и DC до пересечения в точке P. Тогда из подобия треугольников BPC и APD следует, что $\frac{PC}{PD} = \frac{BC}{AD} = \frac{a}{b}$. Следовательно, $\frac{PD}{CD} = \frac{b}{b-a}$. Через вершину C проведём прямую, параллельную AB, до пересечения с основанием AD в точке K. На чертеже образовался вспомогательный треугольник KCD, в котором $\angle CKD = \alpha$, $\angle CDK = \beta$, $CH = h$.

Таким образом, решение задачи сведётся к построению треугольника KCD по двум углам и высоте (см. пример 1). Его образом при гомотетии с центром D и коэффициентом $k = \frac{b}{b-a}$ будет являться треугольник APD. Дальнейшее построение очевидно.

Можно было поступить и по-другому: построить трапецию по основаниям и двум углам, прилежащим к большему основанию (используя параллельный перенос), провести её высоту h', а затем использовать гомотетию с коэффициентом $k = \frac{h}{h'}$.

6. Пусть искомая точка M построена, MB' и MC' — перпендикуляры, опущенные на стороны AB и AC, $B'C' \parallel BC$ (см. рис. 10). Рассмотрим гомотетию с центром A, при которой образом точки B' является точка B. Образом точки C' при этой гомотетии является точка C, а образом точки M — точка P, лежащая на луче AM. Так как гомотетия отображает прямую, не проходящую через её центр, в параллельную, отрезки PB и PC перпендикулярны прямым AB и AC соответственно.

Таким образом, решение задачи сводится к построению точки P пересечения перпендикуляров, восставленных из точек B и C к сторонам AB и AC данного треугольника. Так как искомая точка M — прообраз точки P при указанной гомотетии, то она является пересечением луча AP со стороной BC.

Отметим, что если оба угла B и C острые, то перпендикуляры, восставленные из точек B и C, пересекутся внутри угла BAC, поэтому задача будет иметь единственное решение. В противном случае задача решений не имеет, так как эти перпендикуляры пересекутся вне угла BAC или на его границе.

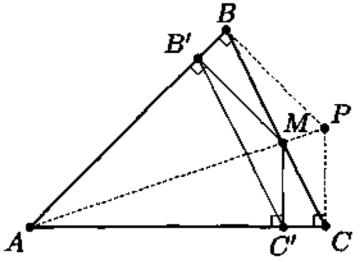


Рис. 10

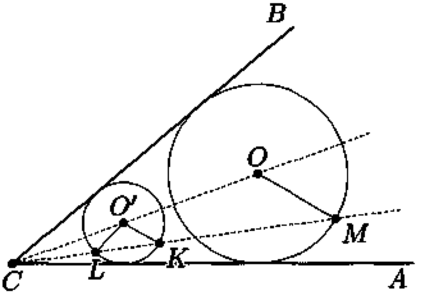


Рис. 11

7. Пусть дан угол BCA и точка M внутри него. Предположим, что искомая окружность с центром O, проходящая через точку M и касающаяся сторон угла, построена (см. рис. 11). Тогда точка O лежит на биссектрисе этого угла.

Рассмотрим произвольную окружность с центром O', также касающуюся сторон данного угла. Она является образом искомой окружности при гомотетии с центром C и коэффициентом $k = \frac{CO'}{CO}$ (почему?) Образом точки M при этой гомотетии является такая точка K на окружности с центром O', что $O'K \parallel OM$.

Таким образом, решение задачи сводится к построению произвольной окружности с центром O', касающейся сторон данного угла, тогда при её пересечении с лучом CM будет получена точка K. Искомая окружность будет являться образом построенной окружности при гомотетии с центром C, переводящей точку K в точку M (другими словами, центр O искомой окружности является пересечением биссектрисы угла BCA и прямой, проходящей через точку M параллельно $O'K$).

Отметим, что поскольку луч CM пересечёт окружность с центром O' в двух точках (K и L — см. рис. 11), то задача всегда имеет два решения.

К теме данного занятия также относятся задачи 2е, 3г, 11, 12, 14ж, з, 15г, д, 18д, 41, 42, 49, 53–56, 60 из раздела «Задачи для самостоятельного решения».

Занятие 8

Типичные конфигурации в задачах на построение

В предыдущих занятиях речь шла в основном о **методах решения задач на построение**. На этом занятии мы рассмотрим несколько типичных конфигураций на плоскости, с которыми связаны ряд важных задач на построение, которые принято считать **базовыми**, так как умение их решать позволяет решить и многие другие задачи (не только на построение). Способы решения этих задач, как правило, опираются на применение различных **преобразований плоскости**, но будут различаться в зависимости от постановки задачи.

I. Прямая и две точки

Пример 1. Даны прямая CD и точки A и B, лежащие относительно неё в одной полуплоскости. Постройте точку M на прямой CD так, чтобы: а) ломаная AMB имела наименьшую длину; б) $\angle AMC - \angle BMD = 90°$; в) $\angle AMC = 2\angle BMD$.

Решение. Пусть искомая точка M построена. Во всех случаях рассмотрим точку B' — образ точки B при симметрии относительно прямой CD (см. рис. 1а – в).

а) Длина ломаной AMB равна: $AM + MB = AM + MB'$ (см. рис. 1а). Эта длина будет наименьшей из возможных, если точка M лежит на отрезке AB'. Действительно, для любой другой точки N, лежащей на прямой CD, $AN+NB = AN+NB' > AB' = AM + MB'$.

Таким образом, решение задачи сводится к построению точки B' — образа точки B при симметрии относительно прямой CD. Искомая точка M является пересечением прямых AB' и CD.

Отметим, что из рассмотренной осевой симметрии следует, что $\angle AMC = \angle B'MD = \angle BMD$, то есть условие минимальности длины ломаной равносильно тому, что лучи MA и MB образуют равные углы с прямой CD. Это понятно также из «физических соображений»: угол падения светового луча на плоское зеркало равен углу отражения. Таким образом, многие задачи, связанные с наименьшей длиной пути, решаются с использованием осевой симметрии.

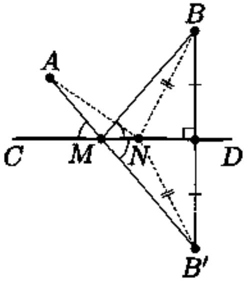


Рис. 1а

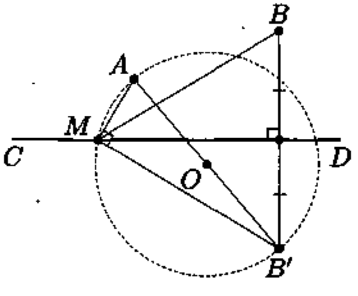


Рис. 1б

б) Так как $\angle AMC - \angle BMD = 90^\circ$, то $180^\circ - \angle AMD - \angle BMD = 90^\circ$, то есть $\angle AMD + \angle BMD = 90^\circ$ (см. рис. 1б). Следовательно, $\angle AMB' = \angle AMD + \angle B'MD = 90^\circ$, то есть отрезок AB' виден из точки M под прямым углом.

Таким образом, решение задачи опять сводится к построению точки B' — образа точки B при симметрии относительно прямой CD. Искомая точка M является пересечением окружности с диаметром AB' (см. задачу 1б занятия 2) и прямой CD.

Отметим, что вторая точка пересечения окружности и прямой CD удовлетворяет условию $\angle BMD - \angle AMC = 90^\circ$.

Отметим также, что аналогичным образом решается и более общая задача, в условии которой можно угол 90° заменить на любой угол α такой, что $0 < \alpha < 180^\circ$.

в) Так как $\angle AMC = 2\angle BMD$, то $\angle EMD = 2\angle BMD$, где луч ME — дополнительный к лучу MA (см. рис. 1в). То есть луч MB' — биссектриса угла EMD. Поэтому существует окружность с центром B', касающаяся сторон угла EMD.

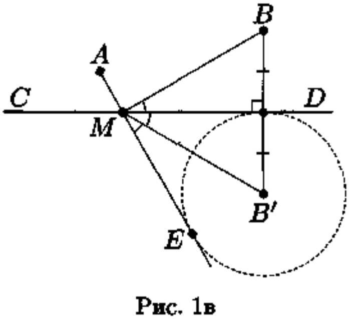


Рис. 1в

Таким образом, решение задачи сводится к построению точки B' — образа точки B при симметрии относительно прямой CD и *окружности с центром* B', *которая касается прямой* CD. Искомая точка M является пересечением касательной к этой окружности, проходящей через точку A (см. задачу 2 занятия 2) и прямой CD.

Пример 2. Населённые пункты A и B разделены каналом с параллельными берегами. В каком месте необходимо построить мост (перпендикулярно берегам), чтобы длина пути из одного пункта в другой была наименьшей?

Решение. Пусть параллельные прямые c и d изображают берега канала и искомый мост XY построен (см. рис. 2). Любой путь из пункта A в пункт B представляет собой ломаную из трёх звеньев, причём длина среднего звена (моста) одна и та же, поэтому длина пути будет наименьшей, если сумма длин двух других звеньев ломаной будет наименьшей. Рассмотрим параллельный перенос на вектор $\overrightarrow{XY}$. Пусть A' — образ точки A при этом переносе, тогда $AX + XY + YB = AA' + A'Y + YB$ будет наименьшей, если $A'Y + YB$ будет наименьшей, то есть если точка Y лежит на отрезке $A'B$. Действительно, рассмотрим другой произвольный мост MN, тогда $AM + MN + NB = AA' + A'N + NB > AA' + A'B = AX + XY + YB$.

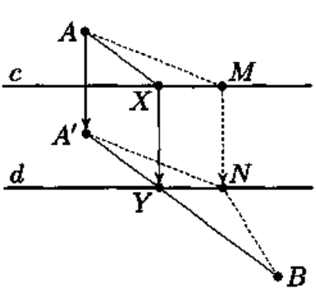


Рис. 2

Таким образом, решение задачи сводится к построению точки A' — образа точки A при параллельном переносе в направлении, перпендикулярном прямой c на расстояние между прямыми c и d (ширину канала).

Отметим, что кроме рассмотренных в примерах 1 и 2 есть и другие конфигурации с двумя прямыми и точкой, в частности угол и точка внутри него (см., например, задачу 7 занятия 2 или задачи для самостоятельного решения).

II. Две окружности

Пример 3. Постройте прямую, проходящую через одну из точек пересечения двух окружностей так, чтобы эти окружности высекали на ней равные хорды.

Решение. Пусть даны пересекающиеся окружности S и S_1, A — их общая точка. Предположим, что искомая прямая XY ($X \in S$, $Y \in$ $\in S_1$) построена (см. рис. 3). Тогда точки X и Y симметричны относительно точки A. Тем самым задача становится частным случаем задачи, рассмотренной в примере 2 занятия 5.

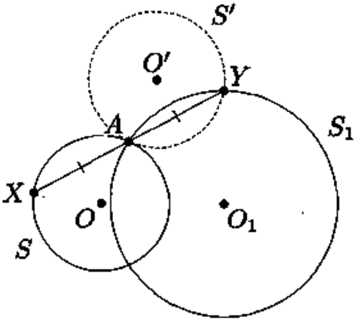


Рис. 3

Решение задачи сводится к построению окружности S', симметричной окружности S относительно точки A. Вторая точка пересечения окружностей S_1 и S' — искомая точка Y. Дальнейшее построение очевидно.

Пример 4. Даны две пересекающиеся окружности. Постройте отрезок, концы которого лежат на данных окружностях, проходящий через одну из точек их пересечения и имеющий заданную длину.

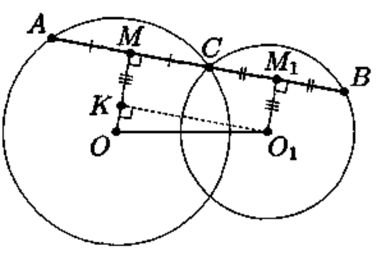


Рис. 4

Решение. Пусть даны две пересекающиеся окружности с центрами O и O_1, C — их общая точка. Предположим, что искомый отрезок AB заданной длины c построен (см. рис. 4). Проведём перпендикуляры OM и O_1M_1 к прямой AB. Поскольку точки M и M_1 — середины хорд AC и BC соответственно, то $MM_1 = \frac{1}{2}c$. Рассмотрим параллельный перенос на вектор $\overrightarrow{M_1O_1}$. Точка K — образ точки M при этом параллельном переносе. Тогда на чертеже образовался **вспомогательный прямоугольный треугольник** OO_1K, в котором заданы гипотенуза OO_1 и катет $O_1K = MM_1 = \frac{1}{2}c$.

Таким образом, решение задачи сведётся к построению треугольника OO_1K по катету и гипотенузе и проведению прямой, проходящей через точку C параллельно O_1K.

Вспомните задачу с той же конфигурацией и похожим решением. [Задача на построение общей касательной к двум данным окружностям, см. задачу 2 занятия 6.]

Задачи

Задача 1. Дана прямая m и точки A и B, лежащие относительно неё в разных полуплоскостях. Постройте точку M на прямой m так, чтобы лучи MA и MB образовали с ней равные углы.

Задача 2. Дан острый угол AOB и точка M внутри него. На сторонах угла постройте точки X и Y так, чтобы периметр треугольника MXY был наименьшим.

Задача 3. Дана прямая m и точки A и B, лежащие в одной полуплоскости относительно m. Постройте на прямой m отрезок CD заданной длины так, чтобы углы ACD и BDC были равны и отрезки AC и BD не пересекались.

Задача 4. Населённые пункты A и B разделены двумя непараллельными друг другу каналами (у каждого канала два берега параллельны). Где нужно построить мосты, перпендикулярные берегам, чтобы длина пути из одного пункта в другой была наименьшей?

Задача 5. Через точку внутри угла проведите прямую так, чтобы отрезок, полученный внутри угла, делился данной точкой в заданном отношении.

Задача 6. Через общую точку двух окружностей проведите прямую так, чтобы эти окружности высекали на ней хорды, разность которых равна a.

Задача 7. Найдите какой-нибудь способ построения общих касательных к двум данным неравным окружностям, принципиально отличающийся от уже рассмотренного.

Ответы и решения

1. Пусть искомая точка M построена (см. рис. 5). Тогда прямая m содержит биссектрису угла AMB, следовательно, она является осью симметрии этого угла.

Значит, решение задачи сведётся к построению образа одной из данных точек при симметрии относительно прямой m, например, построению точки B' — образа точки B. Искомая точка M является пересечением прямых AB' и m.

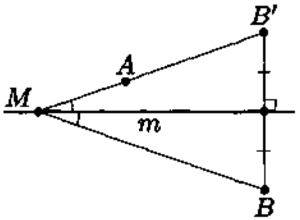


Рис. 5

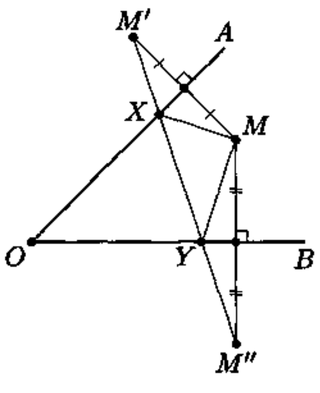


Рис. 6

2. Пусть искомые точки X и Y на сторонах данного угла OA и OB соответственно построены (см. рис. 6). По аналогии с примером 1а рассмотрим точку M' — образ точки M при симметрии относительно прямой OA и точку M'' — образ точки

M при симметрии относительно прямой OB. Тогда $P_{\triangle MXY} = MX + XY + YM = M'X + XY + YM''$. Так как положение концов ломаной $M'XYM''$ фиксировано, то, как уже было доказано, такая сумма принимает наименьшее значение, если точки X и Y лежат на отрезке $M'M''$.

Таким образом, решение задачи сводится к построению точек M' и M''. Искомые точки X и Y являются пересечением отрезка $M'M''$ со сторонами данного угла.

Отметим, что поскольку угол AOB острый, то отрезок $M'M''$ обязательно пересечёт его стороны (для прямого или тупого угла это не так).

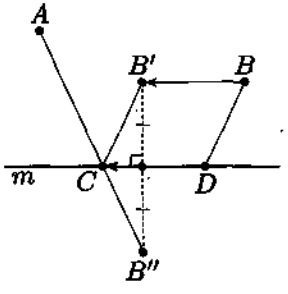


Рис. 7

3. Пусть искомые точки C и D построены и отрезок CD имеет заданную длину a (см. рис. 7). Рассмотрим параллельный перенос на вектор $\overrightarrow{DC}$: B' — образ точки B при таком переносе, тогда отрезки AC и $B'C$ образуют равные углы с прямой m.

Таким образом, после выполнения параллельного переноса вдоль прямой m на отрезок длины a (в направлении от B к A) решение задачи сведётся к построению точки C. Это построение уже практически описано в примере $1a$ (см. комментарии).

Точка D является образом точки C при обратном параллельном переносе.

Отметим, что точка B'', использованная при описанном построении, является образом точки B при **скользящей симметрии** (композиции осевой симметрии и параллельного переноса вдоль этой оси).

4. Пусть искомые мосты MK и PQ построены (см. рис. 8). По сравнению с примером 2 добавилась вторая река, поэтому сделаем два параллельных переноса. А именно, пусть B' — образ точки B при переносе на вектор $\overrightarrow{QP}$, а A' — образ точки A при переносе на вектор $\overrightarrow{MK}$. Тогда образуются два параллелограмма $BB'PQ$ и $AA'KM$, поэтому $AM + MK + KP + PQ + QB = AA' + A'K + KP + PB' + B'B \geqslant AA' + A'B' + B'B$. Последняя сумма не зависит от выбора пути, и равенство достигается, только если ломаная $A'KPB'$ будет прямой.

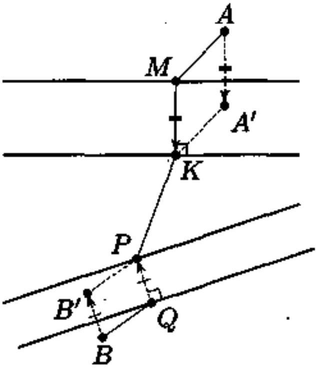


Рис. 8

Таким образом, решение задачи сведётся к описанному выше построению точек A' и B'. Точки K и P — пересечения отрезка $A'B'$ с дальними от точек A и B берегами каналов. Дальнейшее построение очевидно.

5. Пусть внутри угла AOB дана точка M и искомый отрезок CD, концы которого C и D лежат на лучах OA и OB соответственно, построен, причем $\frac{CM}{DM} = \frac{c}{d}$ (см. рис. 9). Тогда точка C является образом точки D при гомотетии с центром M и коэффициентом $k = -\frac{c}{d}$. Пусть O' — образ точки O при этой же гомотетии, тогда $O'C \parallel OD$.

Таким образом, решение задачи сводится к построению точки O' — образа точки O при указанной выше гомотетии и проведению через O' прямой, параллельной OB, которая пересечёт луч OA в точке C.

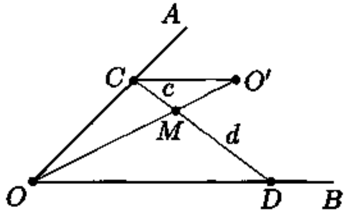


Рис. 9

Отметим, что рассмотренная задача является (в каком-то смысле) обобщением задачи, рассмотренной в примере 2 занятия 5. Это не случайно, так как центральная симметрия (использованная в этом примере) является гомотетией с коэффициентом $k = -1$.

6. Пусть даны окружности S_1 и S_2 с центрами O_1 и O_2 соответственно, A — одна из точек их пересечения. Предположим, что искомый отрезок XY построен, причём $AX - AY = a$ (см. рис. 10).

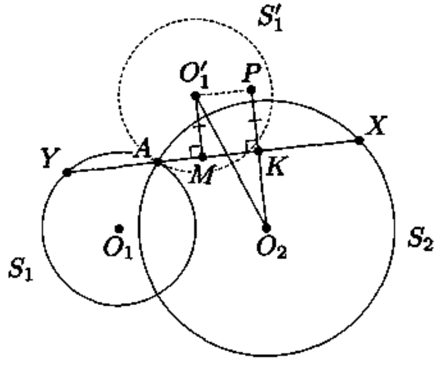


Рис. 10

Проведём аналогию с примером 4, где в схожей конфигурации требовалось, чтобы сумма хорд окружностей имела заданную длину. Там, проведя из центров окружностей перпендикуляры, был найден отрезок, равный полусумме хорд, после чего с помощью параллельного переноса был найден вспомогательный треугольник.

В данном случае построим отрезок, равный полуразности хорд. Для этого рассмотрим окружность S_1' — образ окружности S_1 при симметрии с центром A. Из центра O_1' полученной окружности и из точки O_2 проведём перпендикуляры $O_1'M$ и O_2K к прямой XY. Тогда $MK = AK - AM = \frac{1}{2}AX - \frac{1}{2}AY = \frac{1}{2}a$.

Точка P — образ точки K при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{MO_1'}$, тогда на чертеже образуется вспомогательный прямоугольный треугольник O_2PO_1'.

Поэтому решение задачи сводится к построению окружности S_1', вспомогательного треугольника O_2PO_1' по гипотенузе O_2O_1' и катету $PO_1' = \frac{1}{2}a$ и построению прямой, перпендикулярной O_2P и проходящей через точку A.

7. Пусть даны две неравные окружности с центрами O и O' и радиусами R и R' ($R' > R$) соответственно, не имеющие общих точек. Предположим, что искомые общие касательные AB (внешняя) и CD (внутренняя) построены (см. рис. 11). Заметим, что любые две окружности подобны, более того, существует гомотетия, при которой одна из окружностей является образом другой. Пусть P и Q — точки пересечения прямой OO' с прямыми AB и CD соответственно. Проведём радиусы окружностей OA, OC, $O'B$ и $O'D$, перпендикулярные соответствующим касательным. Тогда, так как OA и $O'B$ параллельны, при гомотетии с центром P, переводящей точку O в точку O', образом точки A является точка B. Коэффициент этой гомотетии $k = \frac{R'}{R}$. Аналогично при гомотетии с центром Q, переводящей точку O в точку O', образом точки C является точка D. Коэффициент этой гомотетии $k = -\frac{R'}{R}$.

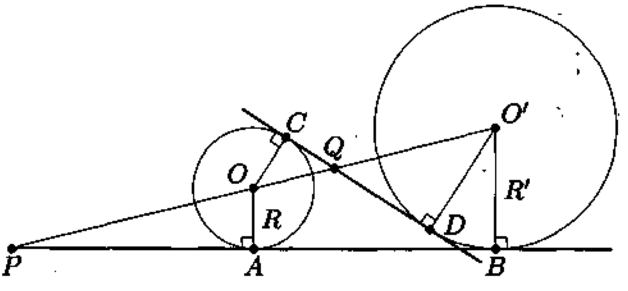


Рис. 11

Следовательно, решение задачи сводится к построению центра гомотетии, если даны точка, её образ и коэффициент. В данном случае для этого достаточно построить векторы $\overrightarrow{OP} = \frac{R}{R'-R}\overrightarrow{O'O}$ и $\overrightarrow{OQ} = \frac{R}{R'+R}\overrightarrow{OO'}$.

Исследование — см. задачу 2 занятия 6.

К теме данного занятия также относятся задачи 29, 30, 36, 44–51, 59, 60 из раздела «Задачи для самостоятельного решения».

Занятие 9

Необычные построения

К необычным построениям в элементарной (школьной) геометрии принято относить построения, связанные с конкретными числовыми данными, и построения с заранее заданными ограничениями.

В отличие от произвольного отрезка, который можно разделить на любое количество частей (см. занятие 4), с произвольным углом это сделать не получится. В частности, невозможно с помощью циркуля и линейки разделить произвольный угол на три равных угла (подробнее — см. Приложения). Вместе с тем для некоторых углов эта задача легко решается, например, прямой угол можно разделить на три равные части (действительно, построить угол, равный 30°, *совсем несложно*). Отсюда и возникают задачи, связанные с делением конкретного угла на определённое количество равных частей.

Что касается ограничений, то они бывают разных типов:

- ограничения, связанные с количеством проводимых линий;
- ограничения, связанные с тем, что какие-то точки чертежа «недоступны»;
- ограничения на инструменты, то есть построения одним циркулем, одной линейкой, «двусторонней» линейкой (с помощью которой можно проводить параллельные прямые на фиксированном расстоянии друг от друга) и так далее.

Отметим здесь удивительное открытие, сделанное в конце XVIII века итальянцем Маскерони:

все построения, которые можно сделать с помощью циркуля и линейки, можно сделать с помощью только одного циркуля!

Естественно, в этом случае приходится сделать одно допущение, а именно: если построены две точки, то считается построенной и прямая, их содержащая, так как саму прямую провести циркулем невозможно. Более подробно — см. Приложения.

Интересно, что с помощью одной линейки заменить все построения, выполняемые циркулем и линейкой, невозможно, но если дополнительно задать круг с отмеченным центром, то этого хватает! Доказательство этих фактов выходит далеко за пределы школьной программы, в частности, связано с таким преобразованием плоскости, как **инверсия** (см. Приложения) и разделом высшей геометрии, называемым **проективной геометрией.**

Рассмотрим примеры.

Пример 1. а) Разделите угол величины $54°$ на три равные части; б) выполните это построение только одним циркулем.

Решение. а) Решение задачи сводится к построению угла, равного $18° = 54° : 3$. Так как $18° = \frac{90° - 54°}{2}$, то достаточно построить угол, дополняющий данный угол величины $54°$ до прямого, и разделить его пополам. Используя построенный угол, делим данный угол на три равные части.

Существуют, конечно, и другие способы решения.

б) Решение задачи сводится к построению дуги, градусная мера которой равна $18°$. Используем, что $18° = 180° - 3 \cdot 54°$.

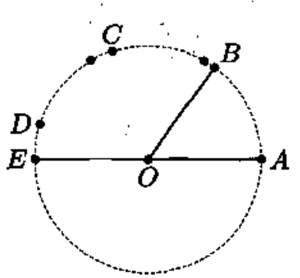


Рис. 1

Проведём окружность с центром O в вершине данного угла, которая пересечёт его стороны в точках A и B (см. рис. 1). От точки A с помощью циркуля последовательно отложим три дуги по $60°$ и получим точку E, диаметрально противоположную точке A. Затем последовательно отложим дуги BC и CD, равные дуге AB. Получим дугу DE величины $18°$, которую и используем для деления дуги AB на три равные части.

Пример 2 (*задача Евклида*). Постройте биссектрису угла, вершина которого «недоступна».

Эту задачу можно решать по-разному, попутно демонстрируя типичные способы решения задач, связанных с «недоступными» точками.

Решение. *Первый способ.* Построим две точки, принадлежащие искомой биссектрисе.

Выберем на сторонах угла произвольные точки A и B и рассмотрим треугольник ABC с «недоступной» вершиной C (см. рис. 2а). Точка O пересечения биссектрис его углов A и B является центром окружности, вписанной в этот треугольник. Следовательно, точка O принадлежит искомой биссектрисе угла C. Выбрав две другие точки D и E на сторонах данного угла и действуя аналогично, можно получить точку Q, также принадлежащую искомой биссектрисе. Таким образом, искомая биссектриса лежит на прямой OQ.

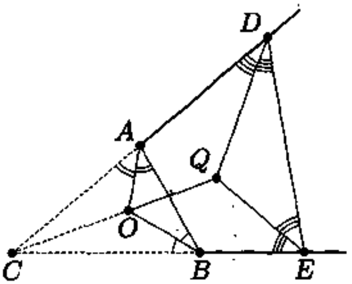


Рис. 2а

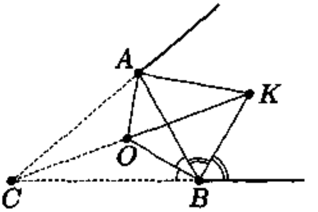


Рис. 2б

Эту же идею можно реализовать иначе: после построения центра O вписанной окружности треугольника ABC построим биссектрисы внешних углов при тех же вершинах и получим центр K вневписанной окружности треугольника ABC (см. рис. 2б). Тогда искомая биссектриса принадлежит прямой OK.

Второй способ. Если данный угол станет углом при вершине равнобедренного треугольника, то искомая биссектриса будет лежать на серединном перпендикуляре к противолежащей стороне. Для построения такого треугольника удобно использовать **метод подобия**. Рассмотрим точку F, принадлежащую одной из сторон данного угла, и проведём через неё прямую, параллельную другой стороне (см. рис. 2в). Отложив на выбранной стороне угла и проведённой прямой равные отрезки FM и FE, получим равнобедренный треугольник EFM, а проведя прямую ME до пересечения с другой стороной угла в точке N, получим ему подобный треугольник NCM, который также будет равнобедренным. Тогда искомая биссектриса лежит на серединном перпендикуляре к отрезку MN.

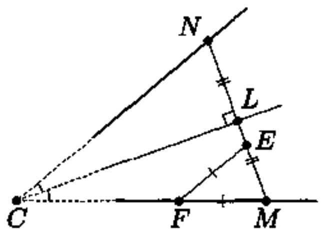


Рис. 2в

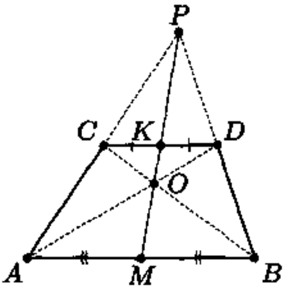


Рис. 3

Пример 3. Даны два параллельных отрезка различной длины. С помощью одной линейки разделите каждый из данных отрезков на две равные части.

Решение. Пусть AB и CD — данные отрезки, тогда четырёхугольник $ABDC$ — трапеция. Для искомого построения используем следующее утверждение: **точки пересечения диагоналей трапеции и продолжений её боковых сторон лежат на одной прямой с серединами оснований трапеции** (см. рис. 3). Доказать это можно либо с помощью векторов, либо используя гомотетии с центрами P и O.

Таким образом, искомое построение сведётся к проведению прямых AD и BC, пересекающихся в точке O, и прямых AC и BD, пересекающихся в точке P. Прямая OP пересечёт данные отрезки AB и CD в их серединах M и K.

В заключение — вопрос (почти шутка). Угол с какой градусной мерой можно разделить на три равные части только одной линейкой? [270°]

Задачи

Задача 1. Постройте прямую, проходящую через данную точку параллельно данной прямой, проведя как можно меньше линий.

Задача 2. Разделите угол величины 19° на 19 равных частей.

Задача 3. Постройте биссектрису угла, вершина которого «недоступна», с помощью только двусторонней линейки.

Задача 4. Постройте касательную к дуге окружности в данной её точке A, если центр окружности «недоступен».

Задача 5. Дан треугольник, одна из вершин которого «недоступна». Постройте точку пересечения медиан этого треугольника.

Задача 6. Дан круг и его диаметр AB.

а) С помощью одной линейки постройте перпендикуляр к прямой AB из точки P, лежащей внутри круга (но не лежащей на прямой AB).

б) Исследуйте возможность аналогичного построения при других случаях расположения точки P.

Задача 7. Дан угол C, вершина которого «недоступна», и точка K внутри угла.

а) Постройте прямую CK.

б)* Выполните это построение только одной линейкой.

Задача 8. На доске была нарисована окружность с отмеченным центром, вписанный в нее четырёхугольник и окружность, вписанная в него, также с отмеченным центром. Затем стёрли четырёхугольник (сохранив одну вершину) и вписанную окружность (сохранив её центр). Восстановите какую-нибудь из стёртых вершин четырёхугольника, пользуясь только линейкой и проведя как можно меньше линий.

Ответы и решения

1. Пусть даны прямая a и точка A, ей не принадлежащая. Отметим, что построение прямой, параллельной данной, описанное в школьных учебниках, основано на построении угла, равного данному, или на проведении перпендикуляров к прямой (см., например, [3], [13] или [19]). В обоих случаях линий проводится сравнительно много. Поэтому для начала можно, например, предложить следующее построение, в котором хватает **четырёх** линий (см. рис. 4а).

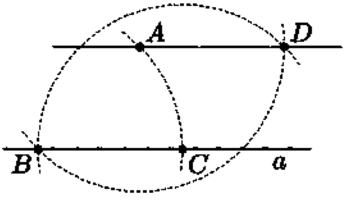


Рис. 4а

1. Выберем на прямой a произвольную точку B и проведём окружность с центром B и радиусом AB, которая пересечёт прямую a в точке C.

2. Проведём окружности с центрами A и C того же радиуса, D — вторая точка их пересечения.

3. Прямая AD — искомая, так как из построения следует, что $ABCD$ — ромб.

Можно обойтись и **тремя** линиями, например:

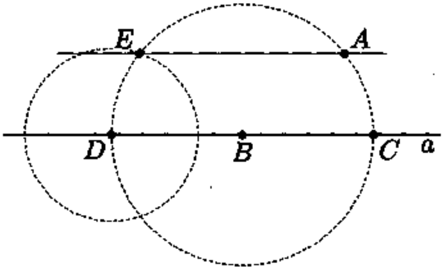


Рис. 4б

1. Выберем на прямой a произвольную точку B и проведём окружность с центром B и радиусом AB, которая пересечёт прямую a в точках C и D (см. рис. 4б).

2. Построим окружность с центром в точке D и радиусом, равным AC.

3. Пусть E — точка пересечения построенных окружностей, лежащая в одной полуплоскости с точкой A относительно прямой a. Тогда прямая AE — искомая.

Действительно, из построения следует равенство треугольников DBE и CBA (по двум сторонам и углу между ними, см. рис. 4в). Кроме того, серединный перпендикуляр m к отрезку CD проходит через точку B. Тогда точки E и A симметричны относительно прямой m, поэтому прямая AE перпендикулярна m, следовательно, эта прямая параллельна прямой a.

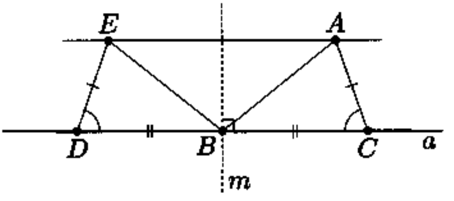


Рис. 4в

Заметим, что формулировка задачи со словами «...как можно меньше линий» не предполагает доказательства минимальности. Тем не менее двумя линиями в этой задаче не обойтись: вторая линия должна быть искомой прямой, значит первая линия должна дать нам еще одну точку на искомой прямой. Но пересечь первую линию мы можем только с прямой a!

2. Для решения задачи достаточно построить угол величины 1°, имея угол 19°. Заметим, что $19^\circ \cdot 19 = 361^\circ = 360^\circ + 1^\circ$. Следовательно, для такого построения достаточно к данному углу последовательно пристраивать равные ему углы до тех пор, пока их не станет 19. Полученный угол величины 1° позволит выполнить искомое построение.

3. Пусть C — данный угол, вершина которого «недоступна». Воспользуемся тем, что диагональ ромба является биссектрисой его углов. Используя двустороннюю линейку можно провести прямые, параллельные сторонам данного угла на одинаковых расстояниях от них. Повторив эту операцию дважды, получим ромбы $ACBD$ и $A_1CB_1D_1$ (см. рис. 5). При гомотетии с центром C один из них является образом другого, поэтому точки C, D

и D_1 лежат на одной прямой, то есть искомая биссектриса лежит на прямой DD_1.

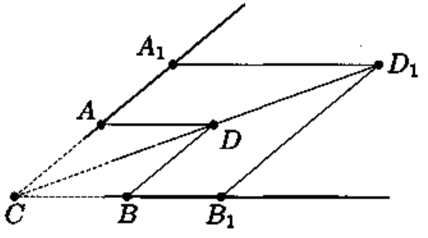


Рис. 5

4. Пусть AD — искомая касательная, где A — данная точка дуги окружности (см. рис. 6а, б).

Первый способ. Воспользуемся тем, что касательная к окружности, перпендикулярная радиусу OA, параллельна любой хорде окружности, перпендикулярной этому радиусу (см. рис. 6а). Для этого проведём окружность с центром A так, чтобы она пересекла данную дугу в точках B и C. Далее проведём хорду BC и прямую AD, параллельную BC.

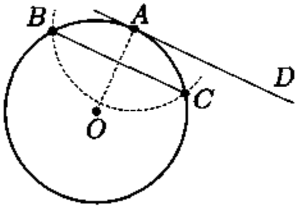


Рис. 6а

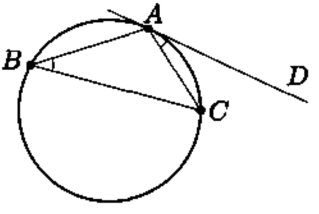


Рис. 6б

Второй способ. Пусть B и C — произвольные точки данной окружности (отличные от A), причём B и D лежат в разных полуплоскостях относительно прямой AC (см. рис. 6б). Тогда угол ABC — вписанный и опирается на дугу AC, а CAD — угол между касательной и хордой AC, стягивающей эту дугу. Следовательно, $\angle CAD = \angle ABC$.

Таким образом, решение задачи сводится к построению угла ABC и угла CAD, ему равного.

5. Пусть ABC — данный треугольник, вершина C которого «недоступна». Для построения искомой точки M достаточно построить медианы AD и BE этого треугольника (см. рис. 7). В этом случае DE — средняя линия треугольника, тогда если F — середина стороны AB, то $AEDF$ — параллелограмм.

Таким образом, решение задачи сводится к последовательному построению середины F стороны AB; прямой FD, параллельной AC (D — точка её пересечения со стороной BC); прямой DE, параллельной AB (E — точка её пересечения со стороной AC); отрезков AD и BE.

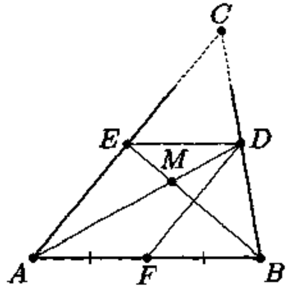


Рис. 7

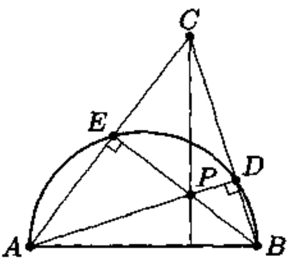


Рис. 8

6. а) Проведём лучи AP и BP до пересечения с окружностью в точках D и E соответственно. Тогда $\angle ADB = \angle AEB = 90°$, так как эти углы вписанные и опираются на диаметр (см. рис. 8). Пусть лучи AE и BD пересекаются в точке C, тогда AD и BE — высоты треугольника ABC. Следовательно, точка P — **ортоцентр** этого треугольника, значит, $CP \perp AB$.

б) Если точка P лежит вне данного круга, то искомое построение осуществляется аналогично (поскольку точка C — **ортоцентр** треугольника APB).

Если точка P лежит на границе данного круга, то задача становится гораздо сложнее. Искомое построение можно осуществить, используя понятие **поляры точки относительно окружности**. Подробнее о **полярном соответствии** — см., например, [14]. Построение перпендикуляра к диаметру AB в этом случае — см. Приложения.

7. а) Для осуществления искомого построения полезно «создать» треугольник ABC так, чтобы точка K стала одной из «замечательных» его точек, например **ортоцентром** (см. рис. 9а). Тогда перпендикуляр, опущенный из K на прямую AB, принадлежит прямой, проходящей через точку C.

Таким образом, решение задачи сведется к проведению перпендикуляров KD и KE к сторонам данного угла, продолжения которых пересекут другие стороны угла в точках A и B соответственно. Прямая KF, перпендикулярная AB, является искомой.

Также возможным (но более громоздким) является построение треугольника, в котором K — точка пересечения медиан.

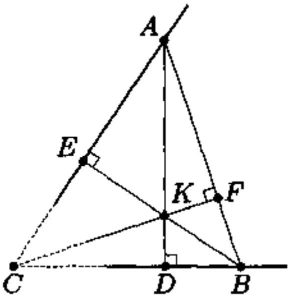


Рис. 9а

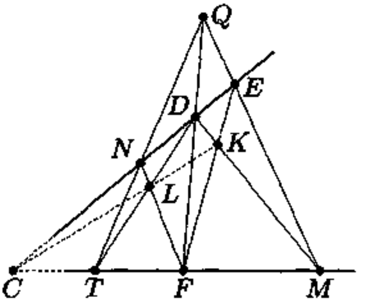


Рис. 9б

б) *Идея этого построения тесно связана с некоторыми понятиями* **проективной геометрии**, но, тем не менее, само решение может быть полностью обосновано в рамках элементарной геометрии.

Через данную точку K проведём отрезки DM и EF с концами на сторонах данного угла C (см. рис. 9б). Пусть прямые FD и ME пересекаются в точке Q. Через точку Q проведем еще одну прямую, пересекающую стороны угла C в точках N и T. Пусть прямые DT и NF пересекаются в точке L, тогда L принадлежит искомой прямой CK.

Докажем это.

1) По **теореме Менелая** для треугольника QDT и секущей NF: $\frac{QN}{NT} \cdot \frac{TL}{LD} \cdot \frac{DF}{FQ} = 1$.

2) По **теореме Менелая** для треугольника QDM и секущей EF: $\frac{QE}{EM} \cdot \frac{MK}{KD} \cdot \frac{DF}{FQ} = 1$.

Из полученных равенств следует, что $\frac{QN}{NT} \cdot \frac{TL}{LD} = \frac{QE}{EM} \cdot \frac{MK}{KD}$ (*).

3) По **теореме Менелая** для треугольника TQM и секущей EN: $\frac{QE}{EM} \cdot \frac{MC}{CT} \cdot \frac{TN}{NQ} = 1 \Leftrightarrow \frac{QN}{NT} = \frac{QE}{EM} \cdot \frac{MC}{CT}$. Подставим полученное значение $\frac{QN}{NT}$ в равенство (*) и упростим: $\frac{TL}{LD} \cdot \frac{DK}{KM} \cdot \frac{MC}{CT} = 1$.

Тогда по обратной **теореме Менелая** для треугольника TDM получим, что точки L, K и C лежат на одной прямой!

Доказательство теоремы Менелая — см., например, [1], [14] или [16].

8. Рассмотрим исходный чертёж: $ABCD$ — данный четырёхугольник; O и Q — центры описанной и вписанной окружностей соответственно (см. рис. 10).

Так как Q — центр окружности, вписанной в $ABCD$, то AQ — биссектриса угла BAD, пересекающая описанную окружность в точке N. Тогда равны градусные меры дуг BN и ND. Пусть MN — диаметр окружности, тогда равны и градусные меры дуг BM и MD. Следовательно, CM — биссектриса угла BCD, поэтому она содержит точку Q — центр окружности, вписанной в $ABCD$.

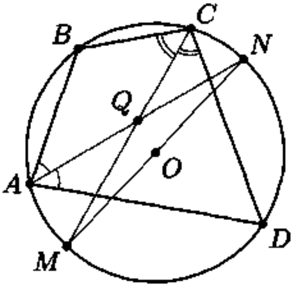


Рис. 10

Таким образом, если на чертеже сохранилась, например, вершина A, то можно восстановить противолежащую вершину C. Для этого достаточно провести **три линии**: луч AQ пересекает описанную окружность в точке N, луч NO пересекает описанную окружность в точке M, и луч MQ пересекает описанную окружность в искомой точке C.

К теме данного занятия также относятся задачи 63–72 из раздела «Задачи для самостоятельного решения».

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Постройте треугольник по следующим данным:

а) двум сторонам и высоте, проведённой к третьей стороне;

б) стороне и двум высотам (рассмотрите два случая);

в) по углу, высоте и биссектрисе, проведённым из вершины этого угла;

г) стороне, противолежащему углу и медиане, проведённой к этой стороне;

д)* медиане, высоте и биссектрисе, проведённым из одной вершины;

е) высоте и медиане, проведённым к одной из сторон, и углу между этой стороной и другой медианой;

ж) двум высотам и медиане, проведённым из разных вершин;

з) по стороне и двум медианам (рассмотрите два случая);

и) по двум медианам и углу между ними;

к) стороне, прилежащему к ней углу и разности двух других сторон;

л) стороне, противолежащему углу и радиусу вписанной окружности;

м) стороне, проведённой к ней высоте и отношению двух других сторон;

н) биссектрисе и длинам двух отрезков, на которые она разбивает противолежащую сторону треугольника;

о)* углу, высоте, проведённой из вершины этого угла, и периметру;

п)* двум сторонам так, чтобы медиана, проведённая к третьей стороне, делила угол, из вершины которого она проведена, в отношении 1 : 2;

р) стороне, радиусу вписанной окружности и радиусу вневписанной окружности, касающейся данной стороны.

Задача 2. Постройте прямоугольный треугольник по следующим данным:

а) сумме катетов и острому углу;

б) сумме катета и гипотенузы и острому углу;

в) гипотенузе и разности катетов;

г) острому углу и радиусу вписанной окружности;

д) гипотенузе и биссектрисе, проведённой к гипотенузе;

е) по катету и отношению другого катета к гипотенузе.

Задача 3. Постройте равнобедренный треугольник по следующим данным:

а) основанию и радиусу описанной окружности;

б) основанию и проекции основания на боковую сторону;

в) двум неравным высотам;

г) радиусу описанной окружности и отношению боковой стороны к основанию.

Задача 4. Дан произвольный треугольник. Постройте: а) описанную около него окружность; б) вписанную в него окружность; в) вневписанные окружности.

Задача 5. Постройте окружность, вписанную в данный угол ABC, которая касается стороны BA в заданной точке A.

Задача 6. Даны прямая и окружность, не имеющие общих точек. Постройте окружность заданного радиуса r, касающуюся данных прямой и окружности.

Задача 7. Даны окружность ω и точка A. Постройте прямую, проходящую через точку A так, чтобы хорда, высекаемая окружностью ω на этой прямой, имела заданную длину d.

Задача 8. Постройте окружность, на которой стороны заданного треугольника высекают три равные хорды, имеющие заданную длину.

Задача 9. Постройте окружность, касающуюся двух данных окружностей, причём одной из них — в заданной точке.

Задача 10*. Постройте окружность, проходящую через две заданные точки и касающуюся данной окружности.

Задача 11*. Постройте окружность, касающуюся заданной окружности и двух заданных непараллельных прямых.

Задача 12*. Постройте окружность, касающуюся двух заданных окружностей так, чтобы прямая, соединяющая точки касания, проходила через заданную точку.

Задача 13. Даны окружность и две точки внутри неё. Впишите в окружность прямоугольный треугольник так, чтобы его катеты проходили через заданные точки.

Задача 14. Постройте выпуклый четырёхугольник $ABCD$ по следующим данным:

а) трём сторонам и двум углам, прилежащим к четвёртой стороне;

б) четырём сторонам и углу между прямыми AB и CD;

в) диагоналям, углу между ними и двум противолежащим сторонам;

г)* трём углам и двум диагоналям;

д)* четырём сторонам, если известно, что $ABCD$ — вписанный;

е)* сторонам AB и AD, углам B и D, если известно, что $ABCD$ — описанный;

ж) сторонам AB и AD, диагонали AC и разности углов B и D, если известно, что диагональ AC является биссектрисой угла A;

з)* четырём сторонам и сумме углов B и D.

Задача 15. Постройте параллелограмм по следующим данным:

а) двум сторонам и высоте;

б) высоте и двум диагоналям;

в) периметру, диагонали и противолежащему ей углу;

г) отношению сторон, углу и высоте;

д) отношению диагоналей, углу между ними и стороне;

е) двум сторонам и углу между диагоналями.

Задача 16. Постройте ромб по следующим данным: а) высоте и диагонали; б) стороне и разности диагоналей.

Задача 17. Постройте трапецию по следующим данным:

а) боковым сторонам, разности оснований и одной из диагоналей;

б) разности оснований, диагонали и двум углам, прилежащим к одному основанию;

в) боковым сторонам, одному из оснований и разности углов при этом основании.

Задача 18. Восстановите треугольник, если заданы:

а) середины его сторон;

б) точки касания его сторон и вписанной окружности;

в) точки пересечения биссектрис его углов с описанной окружностью (треугольник остроугольный);

г) точки, симметричные его ортоцентру относительно его сторон (треугольник остроугольный);

д) точки, симметричные центру описанной около него окружности относительно его сторон;

е)* середина стороны и середины высот, проведённых к двум другим сторонам;

ж)* его центр описанной окружности, точка пересечения медиан и основание одной из высот;

з)* центры вписанной, описанной и одной из вневписанных окружностей;

и)* центр вписанной окружности, середина одной из сторон и основание высоты, проведённой к этой стороне.

Задача 19. Восстановите:

а) квадрат по серединам двух его сторон (рассмотрите два случая);

б) квадрат $ABCD$, если заданы его вершина A и расстояния от вершин B и D до фиксированной точки O плоскости;

в) ромб $ABCD$ с данной длиной высоты, если заданы его вершина A и точка E — середина стороны BC;

г) прямоугольный треугольник ABC по вершине C прямого угла, вершине A острого угла и точке L, лежащей на биссектрисе угла B;

д) равнобедренный треугольник по основаниям его биссектрис;

е)* вписанный и описанный четырёхугольник по трём его вершинам;

ж)* пятиугольник по серединам его сторон.

Задача 20. Дан отрезок длины 1. Постройте:

а) отрезок длины $\sqrt{2-\sqrt{2}}$;

б) угол, тангенс которого равен $\sqrt{\dfrac{2}{5-\sqrt{7}}}$.

Задача 21. Даны отрезки с длинами a и b. Постройте отрезок:

а) $m = \dfrac{a+b}{2}$ (среднее арифметическое);

б) $g = \sqrt{ab}$ (среднее геометрическое);

в) $h = \dfrac{2ab}{a+b}$ (среднее гармоническое);

г) $n = \dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$ (среднее квадратичное).

Задача 22. Даны отрезки с длинами a и b. Постройте отрезок: а) $x = \sqrt[4]{a^3b}$; б)* $y = \sqrt[4]{a^4+b^4}$.

Задача 23. Даны отрезки h_a, h_b и h_c, равные высотам некоторого треугольника. Постройте отрезок r, равный радиусу окружности, вписанной в этот треугольник.

Задача 24. Внутри данного треугольника ABC постройте точку M так, чтобы $S_{AMB} : S_{BMC} : S_{CMA} = 3 : 2 : 1$.

Задача 25. Через вершину выпуклого четырёхугольника проведите прямую, делящую его на две равновеликие части.

Задача 26*. Дан треугольник ABC. Постройте прямую, делящую пополам его площадь и периметр.

Задача 27*. На прямой даны точки A, B, C и D (в указанном порядке). Постройте точку M, из которой отрезки AB, BC и CD видны под равными углами.

Задача 28. Основания двух равнобедренных треугольников лежат на одной прямой, а вершины — в одной полуплоскости относительно этой прямой. Параллельно основаниям треугольника проведите прямую так, чтобы отрезки этой прямой внутри треугольников были равны.

Задача 29. Даны две параллельные прямые и точка, лежащая между ними. Постройте окружность, касающуюся данных прямых и проходящую через данную точку.

Задача 30. Даны две пары параллельных прямых и точка P. Постройте прямую, проходящую через точку P так, что обе пары параллельных прямых отсекают на этой прямой равные отрезки.

Задача 31. Постройте равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с вершиной прямого угла в заданной точке C так, чтобы вершины A и B принадлежали двум заданным окружностям.

Задача 32. Постройте равносторонний треугольник с вершинами, лежащими на трёх заданных параллельных прямых.

Задача 33. Даны точки A и B и окружность S с центром O. Постройте на окружности S такие точки C и D, что прямые AC и BD параллельны, а дуга CD имеет заданную величину α.

Задача 34. В окружности даны непересекающиеся хорды AB и CD. Постройте на окружности такую точку M, чтобы прямые AM и BM высекали на хорде CD отрезок, равный данному,

Задача 35. В окружности даны непересекающиеся хорды AB и CD. На хорде CD задана точка P. Постройте на окружности такую точку M, чтобы прямые AM и BM высекали на хорде CD отрезок, делящийся точкой P пополам.

Задача 36*. Даны две окружности и точка M, не лежащая ни на одной из них. Постройте прямую, проходящую через точку M и высекающую на данных окружностях хорды равной длины.

Задача 37*. Дана окружность, точка C внутри неё, и проходящая через точку C хорда AB. Постройте окружность, касающуюся хорды AB в точке C и данной окружности.

Задача 38. Постройте треугольник ABC, если заданы вершина A и прямые, на которых лежат биссектрисы углов B и C.

Задача 39. Даны две концентрические окружности. Постройте прямую так, чтобы меньшая окружность разделила образовавшуюся хорду большей окружности на три равные части.

Задача 40. Даны две концентрические окружности. Постройте квадрат так, чтобы две его соседние вершины лежали на одной окружности, а две другие вершины — на другой.

Задача 41. В данный сектор круга с центром O (ограниченный радиусами OA и OB и дугой AB) впишите квадрат так, чтобы две его вершины лежали на дуге AB и по одной вершине — на радиусах OA и OB.

Задача 42. Постройте квадрат $ABCD$ так, чтобы вершина A находилась в заданной точке, а вершины B и C принадлежали заданной окружности.

Задача 43. Дан четырёхугольник. Впишите в него ромб, стороны которого параллельны диагоналям четырёхугольника.

Задача 44. Дорога AB пересекает реку BC так, что угол ABC — острый. Гонец находится в точке P внутри этого угла. Ему требуется напоить коня и выехать на дорогу. Найдите кратчайший путь гонца.

Задача 45*. Даны прямая l и точки A и B, лежащие относительно неё в одной полуплоскости. Постройте на прямой l такую точку M, что $AM + BM = a$, где a — заданная величина.

Задача 46. Дан угол и внутри него точки A и B. Постройте параллелограмм, для которого A и B — противоположные вершины, а две другие вершины лежат на сторонах угла.

Задача 47*. Дан острый угол с вершиной O и внутри него точки P и Q. Постройте равнобедренный треугольник ABC так, что основание AB принадлежит одной стороне угла, вершина C — другой, а стороны AC и BC содержат точки P и Q.

Задача 48. Даны острый угол AOB и точка C внутри него. На стороне OB постройте точку M, равноудалённую от стороны OA и от точки C.

Задача 49. От данного угла отсеките треугольник заданного периметра, проведя прямую, параллельную данной.

Задача 50. Через данную внутри угла точку проведите прямую, отсекающую от этого угла треугольник: а) наименьшей площади; б)* наименьшего периметра.

Задача 51. Дан угол AOB и точки C и D внутри него. На сторонах угла постройте точки M и K так, чтобы периметр четырёхугольника $CDKM$ был наименьшим.

Задача 52*. Постройте треугольник наименьшего периметра, вписанный в данный остроугольный треугольник.

Задача 53*. Дан произвольный треугольник ABC. Постройте прямую, проходящую через точку B и разбивающую его на два треугольника с равными радиусами вписанных окружностей.

Задача 54. В данный треугольник впишите две равные окружности, каждая из которых касается двух сторон треугольника и другой окружности.

Задача 55. В данный треугольник ABC впишите треугольник XYZ, стороны которого соответственно параллельны сторонам заданного треугольника LMN.

Задача 56. На стороне AB треугольника ABC дана точка P. Впишите в треугольник ABC треугольник PXY, подобный заданному треугольнику LMN.

Задача 57. На стороне данного треугольника постройте точку, сумма расстояний от которой до двух других сторон равна заданному отрезку.

Задача 58. Внутри данного остроугольного треугольника постройте точку, сумма расстояний от которой: а) до всех вершин и до всех сторон; б)* до всех вершин — наименьшая.

Задача 59. Дана прямая m и две окружности, лежащие в одной полуплоскости относительно этой прямой. На прямой m постройте точку M так, чтобы какие-то две касательные, проведённые из M к двум данным окружностям, образовали с прямой m равные углы.

Задача 60. Через общую точку двух пересекающихся окружностей проведите прямую так, чтобы эти окружности высекали на ней хорды, отношение которых равно заданному.

Задача 61. Даны две окружности и точка O. Постройте окружность с центром в точке O, пересекающую данные окружности так, чтобы одна из её дуг с концами на этих окружностях имела заданную угловую величину.

Задача 62. Даны две равные окружности, на одной из них дана точка A, на другой — точка B. Постройте центр поворота, при котором вторая окружность является образом первой и при этом точка B является образом точки A.

Задача 63. Постройте центр параллелограмма, все вершины которого «недоступны».

Задача 64. Имеется линейка, на которой отмечен отрезок 1 см. С помощью такой линейки постройте какой-нибудь перпендикуляр к данной прямой.

Задача 65. В остроугольном треугольнике отмечена середина одной из сторон. Проведя не более двух линий, постройте меньший треугольник, ему подобный.

Задача 66. Дан треугольник ABC с «недоступной» вершиной C. Пользуясь только двусторонней линейкой, постройте медиану к стороне AB.

Задача 67. В окружности, центр которой «недоступен», проведены две параллельные неравные хорды. Пользуясь только одной линейкой, постройте диаметр, перпендикулярный этим хордам.

Задача 68. На чертеже изображен неравнобедренный треугольник ABC и окружность, проходящая через точки B, C и центр I вписанной окружности треугольника ABC (центры окружностей на чертеже не отмечены). Постройте точку I с помощью одной линейки.

Задача 69. Дан отрезок длины a. Пользуясь только циркулем, постройте отрезок длины $2a$.

Задача 70. На окружности отмечена одна из вершин правильного 2010-угольника. Постройте ещё пять вершин этого многоугольника.

Задача 71. Дан правильный шестиугольник со стороной 1. С помощью одной линейки постройте отрезок, равный $\sqrt{7}$.

Задача 72. Имеется пластмассовый угольник с углами 30°, 60°, 90° (без делений). Постройте с помощью него угол 15°.

Указания к решениям задач и краткие решения

1. а) Используйте вспомогательный прямоугольный треугольник, в котором катет — данная высота, а гипотенуза — одна из данных сторон.

б) Используйте вспомогательный прямоугольный треугольник, в котором гипотенуза — данная сторона, а катет — высота, проведённая к другой стороне.

в) Используйте вспомогательный прямоугольный треугольник, в котором гипотенуза — данная биссектриса, а катет — данная высота.

г) Найдите пересечение двух ГМТ: из которых данная сторона видна под данным углом и находящихся от середины этой стороны на расстоянии, равном данной медиане.

д)* Постройте два вспомогательных перекрывающихся прямоугольных треугольника с общим катетом, равным данной высоте, гипотенузы которых — данные медиана и биссектриса. Воспользуйтесь тем, что серединный перпендикуляр и биссектриса, проведённые к одной стороне, пересекаются на окружности, описанной около искомого треугольника.

е) Используйте вспомогательный прямоугольный треугольник, в котором гипотенуза — данная медиана, а катет — данная высота. Угол между двумя медианами выражается через данный и уже построенный углы.

ж) Продлите данную медиану на её длину, тогда задача сведётся к построению параллелограмма по диагонали и двум высотам.

з) Если даны a, m_b и m_c, то можно использовать вспомогательный треугольник, образованный отрезками a, $\frac{2}{3}m_b$ и $\frac{2}{3}m_c$.

Если даны a, m_a и m_b, то можно использовать вспомогательный треугольник, образованный отрезками $\frac{1}{2}a$, $\frac{2}{3}m_b$ и $\frac{1}{3}m_a$.

и) Используйте вспомогательный треугольник со сторонами $\frac{2}{3}m_b$ и $\frac{2}{3}m_c$ (m_b и m_c — данные медианы) и углом между ними, равным заданному.

к) Отложив меньшую из сторон на большей, можно получить вспомогательный треугольник с двумя заданными сторонами и углом между ними.

л) Пусть в искомом треугольнике ABC задан угол BAC, тогда угол BOC, где O — центр вписанной окружности, через него выражается. Значит, можно построить вспомогательный треугольник BOC по стороне, противолежащему углу и высоте, проведённой к этой стороне, которая равна данному радиусу.

м) Используйте **окружность Аполлония** (см. пример 3 занятия 3), и ГМТ, находящихся от данной прямой на заданном расстоянии.

н) Используйте свойство биссектрисы треугольника и **окружность Аполлония** (см. пример 3 занятия 3).

о)* Выполнив дополнительное построение как в примере 2 занятия 1, получим вспомогательный треугольник. Он строится по основанию, противолежащему углу и высоте.

Либо можно использовать тот факт, что расстояния от вершины треугольника до точек касания вневписанной окружности с продолжениями сторон равно полупериметру треугольника, а также построение общей касательной к двум окружностям.

п)* Используйте, например, алгебраический метод решения, приравняв площади двух треугольников, на которые медиана разбивает искомый треугольник.

р) Пусть в искомом треугольнике ABC заданы сторона $BC = a$, r и r_a. Тогда расстояние между точками касания вписанной и вневписанной окружностей с прямой AB (или с прямой AC) равно a.

Следовательно, решение задачи сводится к построению окружностей радиусов r и r_a, касающихся прямой AB в точках, находящихся на расстоянии a, и построению общих касательных к этим окружностям.

Можно также использовать алгебраический метод, выразив полупериметр искомого треугольника и угол BAC:

$$pr = (p-a)r_a \Leftrightarrow p = \frac{ar_a}{r_a - r}; \qquad \operatorname{tg}\frac{1}{2}\angle BAC = \frac{r}{p-a} = \frac{r_a - r}{a}.$$

2. а) Отложив один из катетов на продолжении другого, получим вспомогательный треугольник с заданной стороной и двумя прилежащими углами.

б) Отложив один из катетов на продолжении гипотенузы, получим вспомогательный треугольник с заданной стороной и двумя прилежащими углами.

в) Отложив меньший катет на большем, получим вспомогательный треугольник с двумя заданными сторонами и углом, противолежащим большей из них.

г) Впишите в прямой угол окружность данного радиуса, а затем используйте, что её центр лежит на биссектрисе данного угла.

д) Используйте алгебраический метод для того, чтобы выразить один из отрезков, на которые основание биссектрисы делит гипотенузу.

е) Используйте метод подобия или алгебраический метод (теорема Пифагора).

3. а) В окружность данного радиуса впишите хорду данной длины.

б) Используйте вспомогательный прямоугольный треугольник, в котором основание является гипотенузой, а проекция — катетом.

в) Используя теорему Фалеса и свойства средней линии треугольника, постройте вспомогательный прямоугольный треугольник, у которого гипотенузой является высота, проведённая к основанию, а катетом — половина другой высоты.

г) Используйте метод подобия.

4. Постройте сначала центры этих окружностей, используя стандартные ГМТ.

5. Центр искомой окружности — пересечение биссектрисы угла ABC и перпендикуляра к прямой BA, восставленного из точки A.

6. Центр искомой окружности является пересечением двух ГМТ: находящихся от данной прямой на расстоянии r и находящихся от центра данной окружности на расстоянии $R+r$, где R — радиус данной окружности.

7. Можно вписать в окружность ω хорду данной длины d и использовать тот факт, что равные хорды окружности равноудалены от её центра. Тогда середина C искомой хорды будет находиться от центра O окружности на найденном расстоянии, а отрезок OA виден из точки C под прямым углом.

Можно также построить касательную к окружности ω, проходящую через точку A, и использовать алгебраический метод, применяя теорему об отрезках секущей.

8. Центр искомой окружности совпадает с центром окружности, вписанной в заданный треугольник. Её радиус равен $\sqrt{r^2+\left(\frac{d}{2}\right)^2}$, где r — радиус вписанной окружности, d — требуемая длина хорд.

9. Постройте касательную к данной окружности, проходящую через заданную на ней точку. Тогда задача сведётся к уже решённой (см. задачу 6 занятия 2).

10*. Пусть P — точка касания данной и искомой окружностей, M — точка пересечения общей касательной к этим окружностям, проходящей через точку P, с прямой AB (A и B — заданные точки). Тогда для любой прямой, проходящей через точку M и пересекающей данную окружность в точках C и D, выполняется равенство: $MC\cdot MD = MP^2 = MA\cdot MB$, из которого следует, что точки A, B, C и D лежат на одной окружности. Таким образом, возможно следующее построение: построим какую-нибудь окружность, проходящую через точки A и B и пересекающую данную окружность в двух точках C и D; на пересечении прямых AB и CD получим точку M; построим касательную к данной окружности, проходящую через точку M; проводим искомую окружность через точки A, B и полученную точку касания P.

Можно также использовать инверсию, центр которой лежит на данной окружности. Тогда задача сведётся к построению окружности, касающейся данной прямой и проходящей через две заданные точки.

11*. Искомая окружность гомотетична заданной относительно точки T их касания. Образами заданных прямых a и b при такой гомотетии являются параллельные им прямые a' и b', которые касаются заданной окружности. При этом если $C = a \cap b$, $C' = a' \cap b'$, то центр гомотетии лежит на прямой CC'. Таким образом, решение задачи сведётся к построению точки T пересечения прямой CC' с заданной окружностью, тогда центр искомой окружности — точка пересечения биссектрисы угла между прямыми a и b с прямой OT (O — центр заданной окружности).

Возможен и *другой способ.* Пусть задана окружность с центром O радиуса R, а у искомой окружности — центр O' и радиус r. Тогда при гомотетии с центром O' и коэффициентом $k = \dfrac{R+r}{r}$ образом искомой окружности является окружность с тем же центром O' и радиусом $R + r$, которая проходит через точку O. Образами заданных прямых a и b при этой гомотетии являются параллельные им прямые a'' и b'', которые касаются полученной окружности. Таким образом, построив прямые a'' и b'', соответственно параллельные прямым a и b и находящиеся от них на расстоянии R, получим угол с вершиной $C'' = a'' \cap b''$. В этот угол можно вписать окружность, проходящую через данную точку O (см. задачу 7 занятия 7). Концентрическая окружность, радиус которой меньше радиуса построенной окружности на R, — искомая.

12*. Пусть заданы точка P и окружности ω и ω_1 с центрами O и O_1 соответственно. Предположим, что A и B — точки касания искомой окружности S с заданными окружностями ω и ω_1 соответственно. Рассмотрим гомотетию с центром A, при которой

S является образом ω, и гомотетию с центром B, при которой ω_1 является образом S. Композицией этих гомотетий является гомотетия с центром в точке Q пересечения прямых AB и OO_1, при которой образом окружности ω является окружность ω_1.

Таким образом, искомые точки A и B будут являться точками пересечения заданных окружностей с прямой PQ.

13. Пусть ABC — искомый прямоугольный треугольник с гипотенузой AB. Тогда отрезок, соединяющий две заданные точки, виден из точки C под прямым углом.

14. а) Пусть заданы стороны AB, BC и CD, углы A и D. Рассмотрите образ прямой AB при параллельном переносе на $\overrightarrow{BC}$ и получите вспомогательный треугольник с известной стороной CD и двумя углами.

б) Рассмотрите образ отрезка AB при том же параллельном переносе, что и в пункте а), и получите вспомогательный треугольник с двумя известными сторонами и углом между ними.

в) Чтобы получить вспомогательный треугольник, две стороны которого — данные диагонали, а угол между ними равен заданному углу, используйте параллельный перенос.

г)* Пусть D_1 и D_2 — образы точки D при параллельных переносах на векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{CA}$ соответственно. Тогда $D_1D = D_2D = AC$. Опишем около треугольников DCD_1 и DAD_2 окружности ω_1 и ω_2. Пусть M и N — точки пересечения прямых BC и BA с окружностями ω_1 и ω_2 соответственно. Тогда MCD и NAD — углы, смежные с данными углами при вершинах C и A. Поскольку $\angle D_1CD = \angle CDA = \angle D_2AD$, то, построив точки D, D_1 и D_2 и используя ГМТ, из которых данный отрезок виден под данным углом, можно построить окружности ω_1 и ω_2. Далее, используя углы MCD и NAD, на этих окружностях восстанавливаются точки M и N. Вершина B находится от точки D на заданном расстоянии и $\angle MBN = \angle CBA$, то есть эта вершина является пересечением двух стандартных ГМТ.

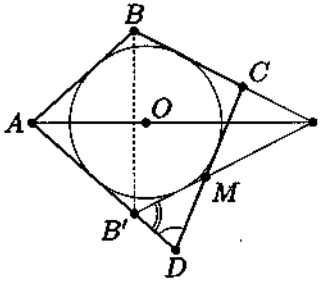
д)* Примените алгебраический метод, выразив диагонали искомого четырёхугольника. Для это можно использовать **теоре-**

му **Птолемея**: $AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$ и соотношение

$$\frac{AC}{BD} = \frac{2R \cdot \sin \angle B}{2R \cdot \sin \angle A} = \frac{BA \cdot BC + DA \cdot DC}{AB \cdot AD + CB \cdot CD},$$

которое получается применением следствия из теоремы синусов и вычислением площади $ABCD$ двумя способами.

е)* Пусть искомый четырёхугольник построен, O — центр вписанной в него окружности (см. рис.). Предположим, что $AD > AB$. Рассмотрим симметрию относительно прямой AO. Так как AO — биссектриса угла BAD, точка B' — образ точки B — лежит на отрезке AD и $B'D = AD - AB$. Пусть M — точка пересечения прямой, симметричной BC, и стороны CD, тогда $\angle MB'D = 180° - \angle B$. Таким образом, искомое построение сведётся к построению вспомогательного треугольника $B'MD$ по стороне и двум прилежащим углам и построению точки O, которая является центром вневписанной окружности этого треугольника, касающейся стороны $B'M$.



ж) Используйте композицию симметрии с осью AC и гомотетии с центром A и коэффициентом $k = \frac{AB}{AD}$. При таком преобразовании угол $C'BC$ (где C' — образ точки C) равен заданной разности углов.

з)* Пусть $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ и $DA = d$. Рассмотрим **поворотную гомотетию** с центром A, переводящую точку B в точку D. Пусть C' — образ точки C при этой гомотетии. Тогда $\angle CDC' = \angle B + \angle D$ или $\angle CDC' = 360° - (\angle B + \angle D)$ и $DC' = \frac{BC \cdot AD}{AB} = \frac{bd}{a}$. Вспомогательный треугольник CDC'

можно построить по сторонам CD, DC' и углу CDC'. Точка A является точкой пересечения окружности с центром D радиуса d и ГМТ X, для которых $C'X : CX = d : a$ (**окружность Аполлония**, см. пример 3 занятия 3).

15. а) Задача сводится к построению треугольника по двум сторонам и высоте, проведённой к одной из них.

б) Задача сводится к построению треугольника по двум сторонам и высоте, проведённой к третьей стороне.

в) Задача сводится к построению треугольника по стороне, противолежащему углу и сумме двух других сторон.

г) Задача сводится к построению треугольника по аналогичным данным с помощью метода подобия.

д) Задача сводится к построению треугольника по стороне, противолежащему углу и отношению двух других сторон с помощью метода подобия.

е) Пусть O — точка пересечения диагоналей искомого параллелограмма $ABCD$, а M — середина стороны AD. Заметим, что $OM = \frac{1}{2}AB$. Тогда задача сводится к построению треугольника AOD по стороне AD, противолежащему ей углу AOD и медиане OM, проведённой к этой стороне (см. задачу 1г этого раздела).

Возможен также алгебраический метод с использованием теоремы косинусов.

16. а) Задача сводится к построению прямоугольного треугольника по катету и гипотенузе.

б) Задача сводится к построению прямоугольного треугольника по гипотенузе и разности катетов.

17. Пусть $ABCD$ — искомая трапеция ($AD \parallel BC$, $AD > BC$).
а) Рассмотрите образ отрезка AB при параллельном переносе на $\overrightarrow{BC}$ и получите вспомогательный треугольник с тремя известными сторонами.

б) Рассмотрите образ отрезка AB при параллельном переносе на $\overrightarrow{BC}$ и получите вспомогательный треугольник с известной стороной и прилежащими к ней углами.

в) Рассмотрите образ боковой стороны при симметрии относительно серединного перпендикуляра к одному из оснований. Получится вспомогательный треугольник, в котором известны две стороны и угол между ними.

18. а) Рассмотрите треугольник с вершинами в заданных точках и через каждую его вершину проведите прямую, параллельную противолежащей стороне.

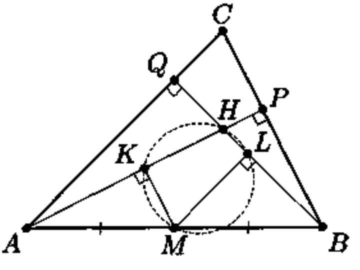
б) Постройте вписанную окружность (по трём заданным точкам) и в этих точках проведите к ней касательные.

в) Постройте окружность по трём заданным точкам и рассмотрите треугольник с вершинами в этих точках. Высоты этого треугольника пересекают окружность в вершинах искомого треугольника.

г) Заданные точки лежат на окружности, описанной около искомого треугольника. Постройте эту окружность и рассмотрите треугольник с вершинами в заданных точках. Биссектрисы этого треугольника пересекают окружность в вершинах искомого треугольника.

д) Используем тот факт, что центр O окружности, описанной около треугольника, является ортоцентром его **срединного треугольника** (треугольника, образованного его средними линиями). Пусть заданы точки A, B и C. Тогда срединный треугольник является образом треугольника ABC при гомотетии с центром O и коэффициентом $\frac{1}{2}$.

Отметим, что искомый треугольник центрально-симметричен треугольнику ABC.



е)* Пусть M — середина стороны AB искомого треугольника ABC, K и L — середины высот AP и BQ (см. рис.). Тогда MK — средняя линия треугольника APB, значит, $MK \perp AP$. Аналогично $ML \perp BQ$. Следовательно, окружность, содержащая три заданные точки, проходит также через ортоцентр H треугольника ABC, причем MH — диаметр этой окружности. Поэтому решение задачи сводится к построению отрезка AB, серединой которого является заданная точка M, а его концы лежат на сторонах угла KHL (см. пример 2 занятия 5).

ж)* Постройте ортоцентр искомого треугольника, используя теорему о прямой Эйлера. Затем постройте прямую, содержащую высоту треугольника, прямую, содержащую сторону, к которой эта высота проведена, и, опустив на неё перпендикуляр из центра описанной окружности, постройте середину этой стороны.

з)* Используйте следующее утверждение (**теорема о «трилистнике»**): «Пусть биссектриса угла B треугольника ABC пересекает описанную около него окружность в точке M; I — центр окружности, вписанной в $\triangle ABC$; Q — центр вневписанной окружности, касающейся стороны AC. Тогда точки A, C, I и Q лежат на окружности с центром M».

и)* Пусть в искомом треугольнике ABC: I — центр вписанной окружности, M — середина стороны AB, H — основание высоты, проведённой из вершины C, C' и C'' — точки касания вписанной и вневписанной окружностей со стороной AB, K — точка вписанной окружности, диаметрально противоположная точке C'. Тогда можно использовать следующие факты: 1) точки C, K и C'' лежат на одной прямой (поскольку вписанная и вневписанная окружности гомотетичны с центром C); 2) $IM \parallel KC''$ (так как точки C' и C'' симметричны относительно точки M).

19. а) Если стороны соседние, то восстановите вершину, построив равнобедренный прямоугольный треугольник. Если стороны противоположные, то отрезок, соединяющий данные точки, равен стороне квадрата и перпендикулярен ей.

б) Рассмотрим поворот с центром в точке A на $90°$. При таком повороте образом вершины D является вершина B, а образом заданной точки O — точка O'. Так как $O'B = OD$, вершина B является пересечением двух ГМТ, находящихся от заданных точек на фиксированных расстояниях.

в) Используйте вспомогательный прямоугольный треугольник AHE, где H — основание высоты, проведённой из точки A к стороне BC. Для построения точки B используйте то, что $BA : BE = 2 : 1$ (**окружность Аполлония**, см. пример 3 занятия 3).

г) Воспользуйтесь тем, что вершина B лежит на перпендикуляре к отрезку AC, восставленному в точке C, и на прямой, касательной к окружности с центром в точке L, для которой этот же перпендикуляр также является касательной.

д) Пусть точки D и E — основания равных биссектрис AD и BE треугольника ABC. Тогда треугольник BDE — равнобедренный ($DB = DE$).

е)* Пусть заданы вершины A, B и C вписанного и описанного четырёхугольника $ABCD$, причём $AB \geqslant BC$. Тогда $AD - CD = AB - BC = m \geqslant 0$. Отложив на стороне AD отрезок DC_1, равный DC, получим вспомогательный треугольник AC_1C, в котором заданы стороны AC и $AC_1 = m$. Кроме того,

$$\angle AC_1C = 180^\circ - \angle DC_1C = 180^\circ - (90^\circ - \frac{1}{2}\angle ADC) = \\ = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle ADC = 90^\circ + \frac{1}{2}(180^\circ - \angle ABC) = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle ABC.$$

ж)* Пусть M, K, L, N и P — середины сторон AB, BC, CD, DE и AE искомого пятиугольника $ABCDE$ соответственно. Рассмотрим композицию центральных симметрий относительно точек M, K, L, N и P. Так как композиция нечётного количества центральных симметрий является центральной симметрией, то неподвижная точка A этого преобразования и будет являться центром симметрии. Для построения точки A достаточно построить образ X' произвольной точки X при данной композиции симметрий, тогда A — середина отрезка XX'.

Отметим, что способ решения, аналогичный указанному, применим для восстановления любого многоугольника с нечётным количеством сторон по их серединам.

20. а) Постройте высоту прямоугольного треугольника, в котором проекции катетов на гипотенузу имеют длины 1 и $2 - \sqrt{2}$.

б) Постройте прямоугольный треугольник, отношение катетов которого равно $\sqrt{\dfrac{2}{5-\sqrt{7}}} = \sqrt{\dfrac{2(5+\sqrt{7})}{18}} = \dfrac{\sqrt{5+\sqrt{7}}}{3}$.

21. Все искомые отрезки можно получить, например, на одном чертеже. Рассмотрим трапецию с основаниями a и b. Тогда искомые отрезки с концами на боковых сторонах параллельны основаниям трапеции. При этом, m — средняя линия трапеции; g — отрезок, делящий трапецию на две подобные; h — отрезок, проходящий через точку пересечения диагоналей трапеции; n — отрезок, делящий трапецию на две равновеликие.

22. Воспользуйтесь тем, что: а) $x = \sqrt[4]{a^3b} = \sqrt{a\sqrt{ab}}$;

б) $y = \sqrt[4]{a^4+b^4} = \sqrt{a\sqrt{a^2+\left(\dfrac{b^2}{a}\right)^2}}$.

23. Используем равенство $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{h_a}+\dfrac{1}{h_b}+\dfrac{1}{h_c}$, которое доказывается с помощью формул для вычисления площади треугольника. Тогда

$$r = \frac{h_ah_bh_c}{h_ah_b+h_bh_c+h_ah_c} = \frac{\frac{h_ah_b}{h_a+h_b}\cdot h_c}{\frac{h_ah_b}{h_a+h_b}+h_c}.$$

Тем самым задача сводится к двукратному построению половины от среднего гармонического двух отрезков.

24. Можно использовать следующее утверждение: если точка M лежит на прямой, параллельной стороне AB и делящей стороны CA и CB треугольника ABC в отношении $m : k$, считая от вершины C, то $S_{AMB} = \dfrac{k}{m+k}S_{ACB}$.

Другой способ: постройте точки A_1, B_1 и C_1 на сторонах BC, AC и AB соответственно так, чтобы выполнялись равенства: $BA_1 : A_1C = 3 : 1$; $CB_1 : B_1A = 2 : 3$ и $AC_1 : C_1B = 1 : 2$. По **теореме Чевы** отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекутся в одной точке, которая и будет искомой.

25. Используйте следующие факты: 1) если M — середина диагонали BD выпуклого четырёхугольника $ABCD$, то ломаная AMC делит этот четырёхугольник на две равновеликие части;

2) в трапеции $AMNC$ ($MN \parallel AC$) треугольники AMC и ANC равновелики.

26.* Используйте, что прямая делит периметр и площадь треугольника в одинаковых отношениях тогда и только тогда, когда она проходит через центр вписанной окружности. Тогда достаточно провести прямую через центр O окружности, вписанной в треугольник ABC, которая делит пополам его периметр. Предположим, что точки M и N на сторонах AB и AC треугольника ABC таковы, что прямая MN — искомая. Пусть D — такая точка на луче AC, что отрезок AD равен полупериметру, тогда $AM = ND$. Пусть точка Q — центр поворота, переводящего точку A в точку D, а точку M — в точку N. Так как угол между прямыми AM и ND известен, точку Q можно построить. Построив затем точку O' — образ точки O и используя, что угол ONO' дополняет угол поворота до $180°$, можно построить точку N.

27.* Для треугольников MAC и MBD примените свойство биссектрисы угла, затем используйте ГМТ, отношение расстояний от которых до двух заданных точек равно заданному числу (**окружность Аполлония**, см. пример 3 занятия 3).

28. Используйте параллельный перенос вдоль заданной прямой, совмещающий середины оснований данных равнобедренных треугольников.

29. Постройте произвольную окружность, касающуюся данных прямых, и используйте параллельный перенос.

Другой способ: учитывая, что радиус искомой окружности равен половине расстояния между данными прямыми, можно построить центр этой окружности, используя пересечение двух ГМТ: находящихся на заданном расстоянии от данной точки и от данной прямой.

30. Если все четыре данные прямые параллельны, то либо задача не имеет решений, либо решением является любая прямая, проходящая через точку P. В противном случае при пересечении данных прямых образуется параллелограмм. Прямые, параллельные его диагоналям и проходящие через точку P, — искомые.

31. Используйте поворот с центром C на угол $90°$.

32. Используйте поворот на $60°$, центр которого лежит на одной из заданных прямых.

33. Пусть A' — образ точки A при повороте с центром O, переводящем точку C в точку D. Тогда, учитывая параллельность AC и BD, угол $A'DB$ либо равен углу поворота, либо дополняет его до $180°$.

34. Заметим, что независимо от положения искомой точки M угол AMB фиксирован. Пусть A' — образ точки A при параллельном переносе на вектор параллельный CD и имеющий заданную длину. Тогда один из концов искомого отрезка является пересечением отрезка CD с дугой окружности, из точек которой отрезок BA' виден под углом AMB.

35. Пусть A', B' и M' — образы точек A, B и M соответственно при симметрии относительно точки P. Тогда точка пересечения BM и $A'M'$ является точкой пересечения отрезка CD с дугой окружности, из которой отрезок BA' виден под углом $180° - \angle AMB$.

36* Пусть искомая прямая m пересекает одну из окружностей в точках A и B, а другую — в точках C и D (точки B и C лежат между точками A и D). Рассмотрим точку P — середину отрезка AD (являющуюся и серединой отрезка BC). Так как $PA \cdot PB = PD \cdot PC$, точка P принадлежит **радикальной оси данных окружностей**. Кроме того, так как центры O_1 и O_2 данных окружностей проектируются в середины отрезков AB и CD, середина K отрезка O_1O_2 проектируется в точку P, то есть $\angle MPK = 90°$.

37* Используйте **лемму Архимеда**: если окружность, вписанная в сегмент, ограниченный хордой AB и дугой окружности, касается хорды в точке C, а окружности — в точке D, то луч DC является биссектрисой угла ADB.

38. Используйте две симметрии, осями которых являются заданные прямые.

39. Используйте центральную симметрию относительно произвольной точки меньшей окружности.

40. Используйте поворот на угол $90°$ с центром в произвольной *точке одной из окружностей.*

41. Постройте квадрат, у которого соседние вершины лежат на отрезках OA и OB на равных расстояниях от O, и используйте гомотетию с центром O.

42. Используйте **поворотную гомотетию** с центром в точке A, углом $45°$ и коэффициентом $k = \sqrt{2}$.

43. Из подобия треугольников можно вывести, что $a = \frac{d_1 d_2}{d_1 + d_2}$, где a — сторона искомого ромба, а d_1 и d_2 — диагонали данного четырёхугольника.

44. Используйте осевую симметрию относительно прямой BC.

45*. Пусть S — окружность радиуса a с центром B, S' — окружность радиуса AM с центром M, A' — точка симметричная A относительно прямой l. Тогда окружность S' касается окружности S, а точка A' лежит на окружности S'. Искомое построение сводится к построению центра окружности, проходящей через точки A и A' и касающейся окружности S внутренним образом (см. задачу 10 этого раздела).

46. Постройте середину O отрезка AB. Тогда задача сведётся к построению отрезка, концы которого лежат на сторонах угла, а точка O является его серединой (см. пример 2 занятия 5).

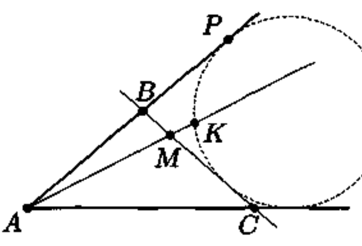
47*. Пусть искомый равнобедренный треугольник ABC построен, CH — его высота. Если проекция точки P на прямую OC ближе к точке O, чем проекция точки Q, то рассмотрим точку P', симметричную P относительно прямой OC. Тогда $\angle P'CQ = \angle P'CP + \angle PCQ = 2\angle OCH = 180° - 2\alpha$, где α — величина данного угла. Таким образом, точка C может быть построена методом ГМТ.

48. Пусть луч OA' симметричен лучу OA относительно прямой OB. Тогда искомая точка M — центр окружности, вписанной в угол AOA' и проходящей через заданную точку C.

49. Используйте вневписанную окружность искомого треугольника (см. задачу 7 занятия 2) либо, так как углы этого треугольника определяются однозначно, используйте построение треугольника по двум углам и периметру (см. пример 2 занятия 1 или метод гомотетии).

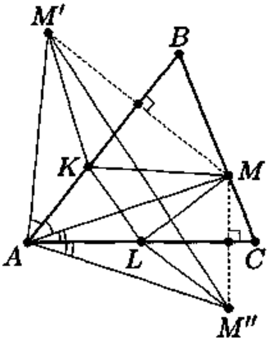
50. а) Площадь треугольника будет наименьшей, если заданная точка — середина его стороны. Для доказательства этого факта выберите любой другой отрезок с концами на сторонах угла, проходящий через заданную точку, и используйте центральную симметрию относительно этой точки.

б)* Пусть прямая BC, проходящая через заданную точку M отсекает от угла A треугольник ABC (см. рис.). Тогда периметр треугольника ABC равен $2AP$, где P — точка касания вневписанной окружности треугольника ABC с одной из сторон угла. Рассмотрим точку K пересечения этой окружности с лучом AM (ближайшую к A). Так как все окружности, вписанные в данный угол, гомотетичны, то отношение $\frac{AK}{AP}$ для этих окружностей одно и то же (не зависит от выбора прямой BC). Следовательно, наименьшее значение AP достигается, если значение AK наименьшее, то есть точка K совпадает с M. Таким образом, решение задачи сводится к тому, чтобы вписать в данный угол окружность, проходящую через точку M (большую из двух, см. задачу 7 занятия 7) и провести через точку M касательную к этой окружности.



51. Для каждой из точек C и D постройте ей симметричную точку относительно ближайшей стороны угла и полученные точки соедините отрезком.

52*. Искомый треугольник образован основаниями высот данного треугольника, то есть является его **ортотреугольником** (**теорема Фаньяно**). Пусть дан остроугольный треугольник ABC и в него вписан треугольник KLM (см. рис.). Докажем, что периметр треугольника KLM — наименьший, если AM — высота треугольника ABC. Для этого рассмотрим точку M', симметричную точке M относительно прямой AB, и точку M'', симметричную точке M относительно прямой AC. Тогда периметр треугольника KLM равен длине трёхзвенной ломаной $M'KLM''$.



При фиксированном положении точки M длина такой ломаной будет наименьшей (равной длине отрезка $M'M''$), если K и L будут являться точками пересечения $M'M''$ со сторонами AB и AC. Заметим, что $AM' = AM = AM''$ и $\angle M'AM'' = 2\angle BAC$, то есть независимо от положения точки M на стороне BC треугольник $M'AM''$ — равнобедренный с фиксированными углами. Его линейные размеры будут наименьшими, если наименьшей будет боковая сторона, равная AM, значит, AM — высота треугольника ABC. В этом случае точки K и L пересечения $M'M''$ со сторонами AB и AC также являются основаниями высот данного треугольника, поскольку стороны треугольника ABC являются биссектрисами внешних углов его **ортотреугольника** (см. задачи 4 и 6 занятия 3).

53*. Пусть BD — отрезок искомой прямой (точка D — на стороне AC), O_1, O_2 и I — центры окружностей, вписанных в треугольники ABD, CBD и ABC. Тогда точки O_1 и O_2 лежат на лучах IA и IC соответственно, причем $O_1O_2 \| AC$. Кроме того, $\angle O_1BO_2 = \frac{1}{2}\angle ABC$. Рассмотрим такую гомотетию с центром I, что образами точек O_1 и O_2 являются точки A и C соответственно. Тогда образом точки B является точка B', лежащая на луче IB, из которой сторона AC видна под углом, равным $\frac{1}{2}\angle ABC$.

Таким образом, построив точку B' как пересечение луча IB с указанным ГМТ и выполнив гомотетию с центром I и коэффициентом $k = \frac{IB}{IB'}$, получим точки O_1 и O_2. Прямая BD — общая касательная окружностей с центрами в этих точках и радиусом, равным расстоянию между прямыми O_1O_2 и AC.

54. Построим окружности равного радиуса, касающиеся друг друга и прямой AB (в той же полуплоскости, что и вершина C). Построив затем касательные к этим окружностям, параллельные прямым BC и AC соответственно, получим треугольник, гомотетичный данному, в который окружности вписаны требуемым образом.

55. Опишите вокруг треугольника LMN треугольник, стороны которого соответственно параллельны сторонам треугольника ABC, и используйте метод подобия.

56. Используйте **поворотную гомотетию** с центром P, углом MLN и коэффициентом $k = \frac{LN}{LM}$.

57. Пусть искомая точка M лежит на стороне BC треугольника ABC и $MP + MK = a$, где a — длина заданного отрезка, P и K — проекции точки M на стороны AB и AC соответственно. «Распрямим» ломаную PMK, отложив на луче KM отрезок MP' так, чтобы $MP' = MP$, тогда прямая, проходящая через точку P' параллельно AC (и находящаяся от AC на расстоянии a), пересечёт луч AB в точке Q. При этом точка M будет лежать на биссектрисе угла PQP'.

58. а) Искомая точка — ортоцентр данного треугольника.

б)* Искомая точка — **точка Торричелли** данного треугольника ABC (точка T такая, что $\angle ATB = \angle BTC = \angle CTA = 120°$).

59. Пусть O и O_1 — центры данных окружностей. Постройте окружность с центром O', симметричную окружности с центром O относительно прямой m, и используйте общие касательные к окружностям с центрами O_1 и O'.

60. Используйте гомотетию с центром в указанной точке и коэффициентом, модуль которого равен заданному отношению.

61. Используйте поворот с центром в точке O на угол, равный данному.

62. Искомый центр поворота является пересечением серединных перпендикуляров к отрезкам AB и OO', где O и O' — центры данных окружностей.

63. Постройте две прямые, каждая из которых равноудалена от прямых, содержащих противоположные стороны параллелограмма.

64. На данной прямой l выберите произвольную точку M и постройте четыре точки, находящиеся от нее на расстоянии 1 см: точки A и B — на прямой l, а точки K и N — в одной полуплоскости относительно l. Тогда $\angle AKB = \angle ANB = 90°$. Пусть лучи AK и BN пересекаются в точке C, а лучи AN и BK — в точке H, тогда CH — искомая прямая, поскольку H — ортоцентр треугольника ABC.

65. Пусть M — отмеченная середина стороны AB треугольника ABC. Постройте окружность с диаметром AB. Если D и E — точки её пересечения со сторонами AC и BC, то треугольник DEC — искомый.

66. Воспользуйтесь дважды тем, что отрезок, параллельный AB, отсечёт от данного треугольника трапецию, у которой точка пересечения диагоналей лежит на искомой медиане.

67. Рассмотрите трапецию, в которой заданные хорды — основания. Прямая, проходящая через точки пересечения её боковых сторон и её диагоналей, разделит основания пополам, поэтому содержит диаметр окружности, перпендикулярный данным хордам.

68. Рассмотрите вторые точки пересечения лучей AB и AC

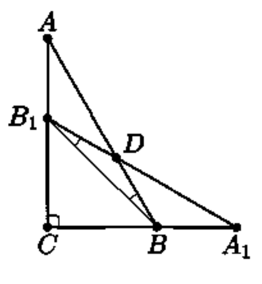
с данной окружностью и воспользуйтесь тем, что данная окружность, а значит, и точки её пересечения со сторонами угла BAC, попарно симметричны относительно прямой AI. Этот факт следует, например, из **теоремы «трилистника»**.

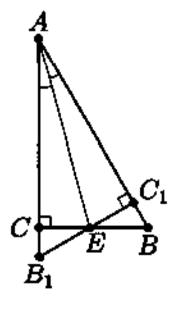
69. Пусть AB — данный отрезок длины a. Тогда точка C, лежащая на луче AB так, что $AC = 2a$, принадлежит окружности с центром B и радиусом a и является вершиной правильного шестиугольника, вписанного в эту окружность, диаметрально противоположной вершине A.

70. Так как число 2010 кратно 6, вершины правильного шестиугольника, вписанного в данную окружность, являются и вершинами правильного 2010-угольника.

71. Пусть $ABCDEF$ — данный шестиугольник, M — точка пересечения прямых BC и DE, тогда $EM = 2$, $AE = \sqrt{3}$, значит, $AM = \sqrt{7}$.

72. Два способа решения из возможных представлены на рисунках. На рисунке слева искомым является любой из равных углов DBB_1 или DB_1B, а на рисунке справа — угол CAE или угол C_1AE.





Приложение

1. О возможных и невозможных построениях

Из того, что обсуждалось на занятиях, на первый взгляд, следует, что всегда можно осуществить построение треугольника по трём элементам, хотя бы один из которых линейный. Но это не так, и надо быть очень аккуратным, если сам формулируешь подобную задачу.

Например, в учебном пособии [1] для самостоятельного решения дана такая задача: **постройте равнобедренный треугольник по биссектрисе угла при основании и высоте, проведённой из той же вершины** (стр. 12, №15в).

На первый взгляд кажется, что никаких проблем нет, так как на чертеже (см. рис. 1) сразу вычленяется **вспомогательный прямоугольный треугольник** AHL, который можно построить по катету и гипотенузе. Проблема здесь в другом: для того чтобы получить из него искомый треугольник ABC, потребуется построить угол LAC, равный $\frac{180^\circ - \alpha}{3}$, где $\angle ALH = \alpha$, а это в общем случае сделать невозможно!

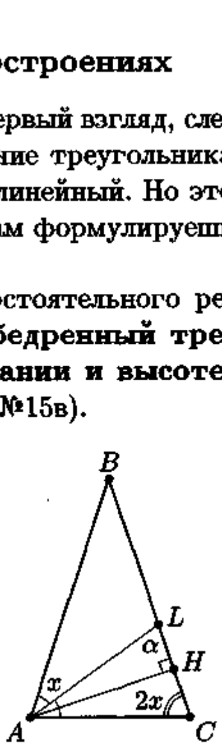


Рис. 1

Это связано с одной из знаменитых задач древности — **задачей о трисекции угла**. Оказывается, произвольный угол с помощью циркуля и линейки разделить на три равные части невозможно. Для некоторых углов, как мы видели, это возможно, однако в общем случае решить эту задачу, возникшую ещё в Древней Греции, долго не удавалось. Доказать невозможность трисекции угла удалось много позже, после того как была построена общая теория алгебраических уравнений. Оказывается, при наличии единичного отрезка можно построить действительные корни любого квадратного уравнения с целыми коэффициентами (в том числе, иррациональные), а вот корни аналогичного кубического уравнения, не имеющего рациональных корней, построить с помощью циркуля и линейки невозможно. Кубическое уравнение возникает в этом случае из тригонометрической формулы тройного аргумента: $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$.

По аналогичным причинам невозможно с помощью циркуля и линейки построить ребро куба, имеющего объём в два раза больше, чем объём данного (**задача об «удвоении» куба**). Действительно, если ребро данного куба взять равным 1, то ребро искомого куба является корнем уравнения $x^3 = 2$, не имеющего рациональных корней. Заметим при этом, что задача об «удвоении» квадрата решается очень легко (решите!).

Невозможность решения третьей древнейшей задачи — **задачи о «квадратуре круга»**, то есть о построении квадрата, равновеликого данному кругу, была доказана ещё позже, когда появилась теория алгебраических чисел. Невозможность такого построения связана с тем, что сторона a такого квадрата является корнем уравнения $a^2 = \pi$ (если круг имеет радиус 1), а π — число **трансцендентное**, то есть не является корнем никакого алгебраического уравнения с целыми коэффициентами.

Попытки решить три знаменитые задачи древности оказали большое влияние на развитие математики. Например, было найдено множество способов деления произвольного угла на три равные части при условии расширения возможностей использования инструментов. Остановимся на способе, предложенном Архимедом. Он использовал циркуль и специальную линейку, на которой были отмечены две точки на некотором расстоянии r.

Поместим вершину угла AOB, который мы хотим разделить на три равные части, в центр окружности радиуса r (см. рис. 2). Продолжим отрезок AO за точку O и, пользуясь нашей «специальной» линейкой, построим секущую BD так, чтобы внешняя часть CD этой секущей равнялась бы радиусу. Угол BOA —

внешний для треугольника BDO, а треугольник BOC — равнобедренный. Следовательно, $\angle BOA = \angle BDO + \angle DBO = \angle BDO + + \angle BCO = \varphi + 2\varphi = 3\varphi$, то есть угол CDO — искомый. Это метод Архимеда получил название **метода «вставки»**.

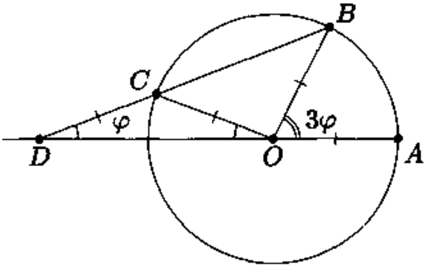


Рис. 2

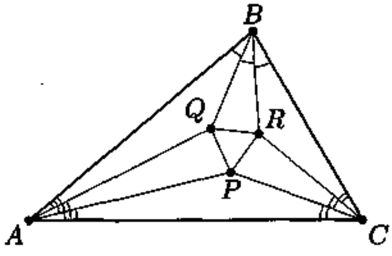


Рис. 3

Исследование различных конструкций, связанных с трисекцией угла привело к открытию удивительной и очень красивой теоремы, которая носит название теоремы Морлея (Великобритания, 1904 г.). **Точки попарного пересечения смежных трисектрис углов треугольника являются вершинами равностороннего треугольника** (см. рис. 3). Её доказательство можно найти, например, в [8].

2. О построении правильных многоугольников

Как уже отмечалось в занятии 4, построение правильных n-угольников сводится к делению окружности на n равных частей и напрямую связано с возможностью построения центрального угла окружности с заданным радиусом R, имеющего градусную меру $\frac{360^\circ}{n}$.

Таким образом, для построения правильного четырёхугольника (квадрата) достаточно построить два взаимно перпендикулярных диаметра окружности, а для построения правильного шестиугольника можно использовать, что его сторона равна радиусу описанной окружности, что даёт возможность легко выполнить это построение **одним циркулем**.

Поскольку мы умеем с помощью циркуля и линейки делить любую дугу на две равные части (для этого достаточно разделить пополам стягивающую её хорду), то тем самым обеспечивается построение правильного восьми- и шестнадцатиугольников, правильного двенадцатиугольника и так далее.

Опираясь на соотношение $a = \frac{R(\sqrt{5}-1)}{2}$ (полученное в примере 2 занятия 4), которое выражает сторону правильного десятиугольника через радиус описанной около него окружности, можно построить правильный десятиугольник, а значит, и правильный пятиугольник, двадцатиугольник, и так далее.

Попутно *покажем*, как построить стороны правильных десятиугольника и пятиугольника на одном чертеже.

Рассмотрим окружность с центром O радиуса R, в которой проведём два взаимно перпендикулярных диаметра AB и CD (см. рис. 4а). Разделим отрезок AO пополам, тогда $PD = \sqrt{R^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2} = \frac{R\sqrt{5}}{2}$. Поэтому, проведя дугу с центром P и радиусом PD до пересечения с отрезком AB в точке E, получим, что $OE = PD - PO = \frac{R(\sqrt{5}-1)}{2}$, то есть OE — сторона **правильного десятиугольника**, вписанного в рассматриваемую окружность.

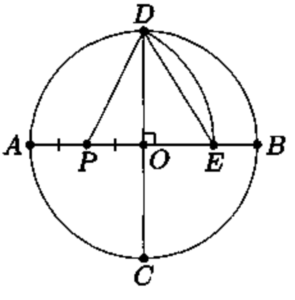


Рис. 4а

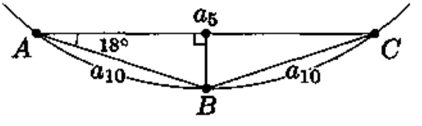


Рис. 4б

Докажем, что DE — сторона **правильного пятиугольника**, вписанного в ту же окружность. Действительно, сторона a_{10} правильного десятиугольника и сторона a_5 правильного пятиугольника, вписанных в одну окружность, связаны соотношением: $a_5 = 2a_{10}\cos 18^\circ$ (см. рис. 4б). Из равнобедренного треугольника AOB с углом при вершине 36°, уже рассмотренного в примере 2 занятия 4 (см. рис. 4в), несложно получить значения тригонометрических функций угла 18°: $\sin 18^\circ = \frac{0,5a}{R} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$, значит, $\cos 18^\circ = \frac{\sqrt{2(5+\sqrt{5})}}{4}$ (основное тригонометрическое тождество). Таким образом, $a_5 = \frac{R\sqrt{2(5-\sqrt{5})}}{2}$. С другой стороны, $DE = \sqrt{OD^2 + OE^2} = \frac{R\sqrt{2(5-\sqrt{5})}}{2}$ (см. рис. 4а).

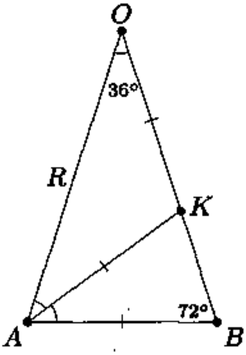


Рис. 4в

Таким образом, полностью описаны способы построения правильного n-угольника при $n = m \cdot 2^{k-1}$, где $k \in \mathbb{N}$; $m = 3$; 4; 5. Далее, можно, например, найти способ построения правильного пятнадцатиугольника. Для этого достаточно построить его внешний угол: $\beta_{15} = 24^\circ = 60^\circ - 36^\circ$.

Может быть все правильные n-угольники можно построить с помощью циркуля и линейки? Нет, например, нельзя построить правильный семиугольник или девятиугольник, а правильный семнадцатиугольник — можно!

Решение проблемы в общем виде выходит далеко за рамки элементарной геометрии и связано с проблемой **разрешимости алгебраических уравнений в квадратных радикалах**. В возрасте 17 лет К. Гауссу удалось доказать, что задача имеет решение тогда и только тогда, когда $n = 2^k p_1 p_2 \ldots p_m$, где p_i — простые попарно различные числа Ферма, имеющие вид: $p_i = 2^{2^s} + 1$, где s — натуральное число или 0 (либо $p_i = 1$). Для иллюстрации приведем несколько первых чисел Ферма: 3; 5; 17; 257; ... Именно после этой работы Гаусс принял окончательное решение посвятить свою жизнь математике. Он придавал этому своему открытию такое значение, что даже выразил пожелание, чтобы над его могилой был воздвигнут памятник в форме правильного семнадцатиугольника. На могильном камне Гаусса в Гёттингене этой скульптуры нет, но памятник, воздвигнутый Гауссу в Брауншвейге, стоит на семнадцатиугольном постаменте. Подробнее — см., например, [7], [9], [11].

3. Инверсия и задачи Аполлония

Согласно описанию Паппа Александрийского (III век н. э.), не дошедшее до нас сочинение древнегреческого математика Аполлония Пергского (262–190 гг. до н. э.) «Касания» состояло из двух книг. В этом сочинении решалась задача: построить окружность, касающуюся трёх объектов. Этими объектами могли быть окружности, прямые или точки. В качестве иллюстрации остановимся на двух наиболее интересных **задачах Аполлония**, где в качестве заданных объектов выступают: 1) точка и две окружности; 2) три окружности.

Для решения этих задач нам потребуются познакомиться с **инверсией** на плоскости.

Пусть на плоскости задана окружность ω с центром O и радиусом R.

> **Определение 1.** *Инверсией* относительно окружности ω называется преобразование плоскости, при котором образом произвольной точки A, отличной от O, является точка A', лежащая на луче OA, для которой выполняется равенство: $OA \cdot OA' = R^2$.

Заданная окружность ω называется при этом **окружностью инверсии**, а её центр O — **центром инверсии**. Из определения **инверсии** следует, что если точка A' — образ точки A при некоторой **инверсии**, то точка A является образом точки A' **при той же инверсии**. Отметим, что построение (с помощью циркуля и линейки) образа произвольной точки при **инверсии** можно осуществить различными способами. Например, если точка A лежит внутри окружности ω, то её образ A' является пересечением луча OA с касательной к окружности ω, проведённой в точке C

(C — одна из точек пересечения окружности с перпендикуляром к OA, восставленным в точке A, см. рис. 5). Аналогичным образом по точке A' восстанавливается точка A.

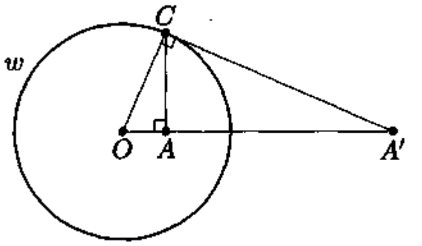


Рис. 5

Отметим также, что построение образов прямых и окружностей при инверсии сводится к построению образов соответствующих точек, которое облегчается применением некоторых свойств инверсии. Сформулируем эти свойства (их доказательства можно найти, например, в [3] или в [14]).

Образы прямых и окружностей при инверсии

1) Прямая, проходящая через центр инверсии, отображается на себя.

2) Прямая, не содержащая центр инверсии, отображается на окружность, проходящую через центр инверсии.

3) Окружность, содержащая центр инверсии, отображается на прямую, перпендикулярную линии центров данной окружности и окружности инверсии.

4) Окружность, не содержащая центр инверсии, отображается на окружность, также не содержащую центр инверсии.

5) Окружность, **ортогональная** к окружности инверсии, отображается на себя.

6) Окружность, содержащая две точки, инверсные друг другу, отображается на себя.

7) Касание окружностей и прямых сохраняется при инверсии (за исключением случая, когда точка касания совпадает с центром инверсии, тогда образом касающихся объектов является пара параллельных прямых).

Рассмотрим теперь две классические **задачи Аполлония**.

Задача 73. Постройте окружность, проходящую через данную точку и касающуюся двух данных окружностей.

Решение. Пусть дана точка A и окружности ω_1 и ω_2. Предположим, что искомая окружность ω построена (см. рис. 6). Заметим, что при инверсии относительно произвольной окружности с центром A окружности ω_1 и ω_2 переходят в окружности (свойство 4), а окружность ω — в общую касательную их образов (свойства 3 и 7).

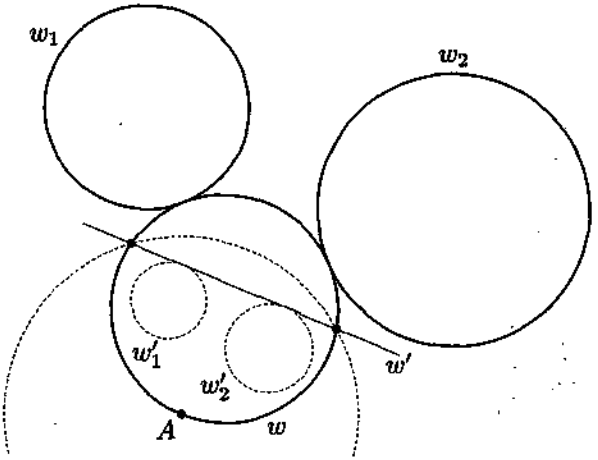


Рис. 6

Отсюда вытекает способ построения: 1) выполняем инверсию с центром A; 2) строим общую касательную к окружностям ω_1' и ω_2' — образам окружностей ω_1 и ω_2; 3) выполняем инверсию с центром A.

Искомая окружность будет образом общей касательной.

Так как к двум непересекающимся окружностям можно провести четыре общие касательные, то задача может иметь четыре решения. Отметим также, что если точка A лежит на окружности ω_1, то образом ω_1 при рассмотренной инверсии является прямая (свойство 3), поэтому в этом случае вместо общей касательной к двум окружностям мы будем строить прямую, параллельную данной и касающуюся данной окружности.

Задача 74. Постройте окружность, касающуюся трёх данных окружностей.

Решение. Рассмотрим два возможных способа решения.

Первый способ. Пусть окружность ω радиуса R касается окружностей ω_1, ω_2 и ω_3 радиусов R_1, R_2 и R_3 соответственно. Без ограничения общности можно считать, что $R_1 \leqslant R_2 \leqslant R_3$. Пусть, например, ω касается ω_1 и ω_3 внешним образом, а ω_2 — внутренним (см. рис. 7а). Заменим окружности ω, ω_2 и ω_3 на концентрические им окружности ω', ω_2' и ω_3' так, чтобы ω' касалась окружностей ω_2' и ω_3' и проходила через центр окружности ω_1. Для этого достаточно, чтобы радиусы окружностей ω', ω_2' и ω_3' были равны $R+R_1$, R_2+R_1 и R_3-R_1 соответственно.

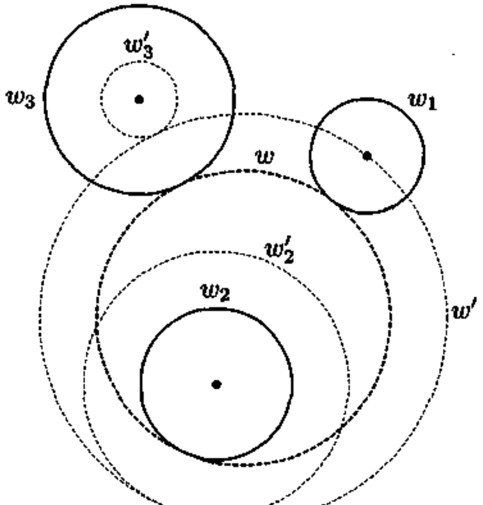


Рис. 7а

Очевидно, что, построив окружность ω', мы сможем затем построить и искомую окружность ω. Построение окружности ω' описано в задаче 1 (если виды касания заданы, то окружность восстанавливается однозначно). Таким же способом (с точностью до знаков перед R_1) можно выполнить построение и в остальных случаях касания.

Отметим, что задача может иметь восемь решений, так как касание каждой пары окружностей может быть как внешним, так и внутренним. Задача не имеет решений, если, например, данные окружности — концентрические.

Второй способ. Пусть какие-то две из данных окружностей, например, ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B (см. рис. 7б). Следовательно, при инверсии с центром в точке A относительно окружности с радиусом AB данные окружности перейдут в прямые, пересекающиеся в точке B (свойство 3), а третья окружность — в окружность или в прямую. Построив окружность, касающуюся двух прямых и окружности (прямой), и сделав инверсию, получим искомую окружность ω.

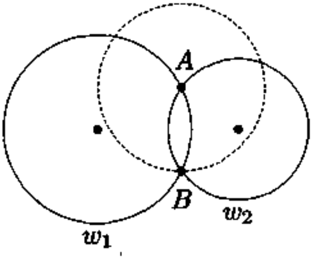


Рис. 7б

В случае если никакие две из данных окружностей не имеют общих точек, будем увеличивать радиусы всех трёх окружностей на одно и то же число до тех пор, пока не получим хотя бы две пересекающиеся окружности. Выполнив для них построение, описанное выше, и уменьшив затем радиусы соответствующим образом, получим искомую окружность.

4. Окружность Аполлония и флибустьеры

В трактате Аполлония Пергского «О кругах» рассматривалась ещё одна интересная задача, которая является «базовой» при решении многих задач на построение. На современном языке её можно сформулировать, например, так.

Задача 1. Даны две точки A и B. Найдите ГМТ M плоскости таких, что $\dfrac{AM}{BM} = k$ ($k > 0$ — фиксированное число).

Решение. Если $k = 1$, то **искомое ГМТ** очевидно: **серединный перпендикуляр к отрезку** AB.

Для случая $k \neq 1$ предложим три способа решения этой задачи.

Первый способ («классический»). Какие из точек, принадлежащих искомому геометрическому месту, легче всего найти? Те, которые лежат на прямой AB. Действительно, на прямой AB существуют две точки, отношение расстояний от которых до точек A и B равно k. Одна из них, точка C, лежит на отрезке AB, а другая, — точка D — вне этого отрезка (см. рис. 8а).

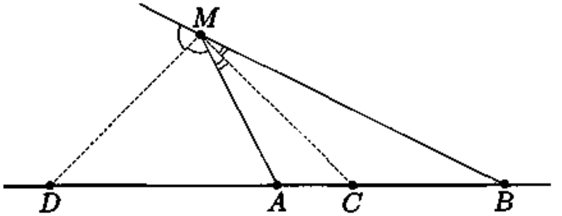


Рис. 8а

Пусть точка M удовлетворяет условию задачи и не лежит на прямой AB. Соединим её отрезками со всеми построенными точками. Тогда справедливы два равенства: $\frac{MA}{MB} = \frac{CA}{CB} = k$ (1) и $\frac{MA}{MB} = \frac{DA}{DB} = k$ (2). Из равенства (1) следует, что MC — биссектриса угла M треугольника AMB. Действительно, если это не так, то, проведя биссектрису ME этого треугольника и используя её свойство, получим, что $\frac{EA}{EB} = \frac{MA}{MB} = k$ (см. рис. 8б). Но из аксиом планиметрии следует, что внутри отрезка AB существует единственная точка, делящая его в заданном отношении, то есть точка E совпадает с точкой C.

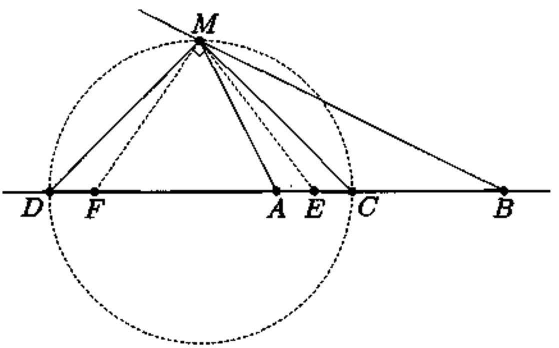


Рис. 8б

Аналогично, рассмотрев утверждение, обратное свойству биссектрисы внешнего угла треугольника, из равенства (2) получим, что MD — биссектриса внешнего угла при вершине M треугольника AMB. (Доказательства свойств биссектрис треугольника — см., например, [14], [16] или [19].)

Так как $MC \perp MD$, то отрезок CD виден из точки M под прямым углом, то есть **точка M лежит на окружности с диаметром CD** (см. рис. 8б).

Докажем теперь, что любая точка этой окружности удовлетворяет заданному условию. Пусть это неверно, то есть на окружности с диаметром CD нашлась точка M такая, что $\frac{AM}{BM} \neq k$. Для определённости будем считать, что $\frac{AM}{BM} < k < 1$ (см. рис. 8б). Проведём биссектрисы ME и MF внутреннего и внешнего углов треугольника AMB (точки E и F лежат на прямой AB). Так как $\frac{CA}{CB} = k$ и $\frac{EA}{EB} = \frac{MA}{MB} < k$, то $EA < CA$. Аналогично, так как $\frac{DA}{DB} = k$ и $\frac{FA}{FB} = \frac{MA}{MB} < k$, то $FB < DB$. Таким образом, точки E и F лежат внутри отрезка CD. Это противоречит тому, что $\angle EMF = \angle CMD = 90°$.

Полученное противоречие показывает, что **любая точка рассматриваемой окружности принадлежит искомому ГМТ**.

Найденное геометрическое место точек называется **окружностью Аполлония**.

В процессе доказательства практически получено важное **следствие**:

Пусть задана окружность Аполлония точек A и B, соответствующая некоторому числу $k \neq 1$. Рассмотрим две произвольные точки P и Q, не лежащие на этой окружности. Тогда числа $p = \frac{AP}{BP} - k$ и $q = \frac{AQ}{BQ} - k$ имеют разные знаки тогда и только тогда, когда одна из точек P или Q лежит внутри окружности, а другая — вне окружности.

Второй способ («координатный»). Введём декартову систему координат, в которой точки A и B лежат на оси абсцисс, а начало координат является серединой отрезка AB (см. рис. 9). Пусть $B(b;0)$, $A(-b;0)$, $M(x;y)$, тогда $AM^2=(x+b)^2+y^2$; $BM^2=(x-b)^2+y^2$. При $k>0$ равенство $\frac{AM}{BM}=k$ равносильно равенству $AM^2=k^2\cdot BM^2$, следовательно, $(x+b)^2+y^2=k^2(x-b)^2+k^2y^2$.

Раскрыв скобки и перегруппировав слагаемые, получим, что $(k^2-1)(x^2+y^2)-2(k^2+1)bx+(k^2-1)b^2=0$. Учитывая, что $k\neq 1$, разделим полученное равенство на (k^2-1), после чего выделим полный квадрат с переменной x. Получим уравнение

$$\left(x-\frac{k^2+1}{k^2-1}b\right)^2+y^2=b^2\left(\left(\frac{k^2+1}{k^2-1}\right)^2-1\right).$$

Это уравнение является уравнением окружности с центром $\left(\frac{k^2+1}{k^2-1}b;0\right)$ и радиусом $R=\sqrt{b^2\left(\left(\frac{k^2+1}{k^2-1}\right)^2-1\right)}=\frac{2kb}{|k^2-1|}$.

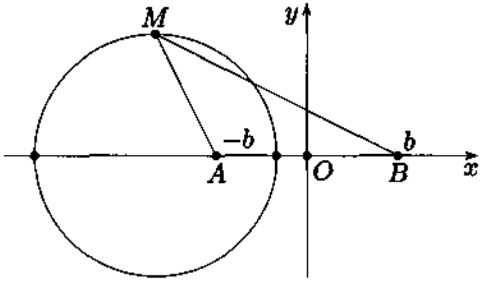


Рис. 9

Все проделанные преобразования были равносильными, поэтому **все точки полученной окружности принадлежат искомому ГМТ**.

Третий способ («инверсия»). Нам потребуется **формула, выражающая изменение расстояний при инверсии**: если X' и Y' — образы точек X и Y соответственно при инверсии с относительно окружности с центром O и радиусом R, то $X'Y'=\frac{R^2}{OX\cdot OY}\cdot XY$. Её несложно вывести, используя определение инверсии и подобие треугольников (Более подробно — см., например, [3] или [14]).

Рассмотрим множество точек, удовлетворяющих заданному условию. Рассмотрим инверсию относительно окружности с центром B и радиусом BA. При таком преобразовании точка A неподвижна, а образом произвольной точки M нашего множества является некоторая точка M'. Тогда, используя формулу, приведенную выше, и условие задачи, получим: $AM' = \frac{BA^2}{BA \cdot BM} \cdot AM = kBA$. Следовательно, точка M' лежит на окружности с центром A и радиусом kBA.

Таким образом, искомое ГМТ при указанной инверсии переходит в окружность с центром A и радиусом kBA. Так как $k \neq 1$, то эта окружность не проходит через центр инверсий, поэтому искомое ГМТ также является окружностью.

Отметим, что все прямые, проходящие через точку A, **ортогональны** к окружности с центром A, а их образами при рассмотренной инверсии являются окружности, проходящие через точки A и B (за исключением образа прямой AB), поэтому найденная окружность **ортогональна** всем этим окружностям.

Отдельно отметим связи **окружности Аполлония** с **инверсией** и с **проективными преобразованиями** плоскости.

1) Пусть точки A и B являются образами друг друга при инверсии относительно некоторой окружности с центром O и радиусом R (см. рис. 10). Тогда для любой точки M этой окружности отношение $\frac{AM}{BM}$ одно и то же, то есть окружность инверсии является **окружностью Аполлония** для точек A и B.

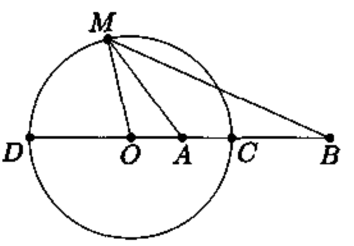


Рис. 10

Действительно, так как $OA \cdot OB = R^2$, то $\frac{OA}{OM} = \frac{OM}{OB}$, следовательно, треугольники AOM и MOB подобны (по двум сторонам и углу между ними). Тогда $\frac{AM}{BM} = \frac{OM}{OB} = \frac{R}{OB} = \text{const}$.

2) Напомним, что если четыре точки A, B, C и D лежат на одной прямой, то величина $\lambda = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} : \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}}$ называется **двойным отношением** этих точек. Эта величина сохраняется при **проективных преобразованиях**. Если $\lambda = -1$, то четверка точек A, B, C, D называется **гармонической**. Несложно убедиться, что точки A и B вместе с точками C и D прямой AB, принадлежащими **окружности Аполлония**, образуют **гармоническую четверку** (см. рис. 10). Более подробно об этом — см., например, [9].

Рассмотрим теперь задачу на построение.

Задача 2. Даны точки A и B и прямая m, не перпендикулярная прямой AB. Для каждой точки M прямой m рассмотрим отношение $\frac{AM}{BM}$. Постройте такие точки, для которых это отношение принимает наибольшее и наименьшее значения.

Решение. Рассмотрим произвольную точку N прямой m и вычислим отношение $k = \frac{AN}{BN}$. Если $k = 1$, то точка N принадлежит серединному перпендикуляру n к отрезку AB (см. рис. 11а). В этом случае для точек прямой m в одной из полуплоскостей с границей n число $k > 1$, а для точек другой полуплоскости $k < 1$. Следовательно, значение $\frac{AM}{BM}$ в точке N не является ни наибольшим, ни наименьшим.

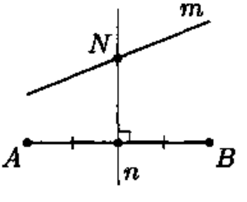


Рис. 11а

Если $k \neq 1$, то рассмотрим окружность Аполлония точек A и B, определяемую этим числом. Точка N принадлежит этой окружности и прямой m, поэтому прямая m либо пересекает окружность, либо является к ней касательной. В первом случае точки прямой m, находящиеся по одну сторону от N, лежат внутри окружности, а находящиеся по другую сторону от N — вне окружности (см. рис. 11б). Тогда, согласно следствию, сформулированному выше, для точек M одного из этих множеств $\frac{AM}{BM} > k$, а для точек M другого — $\frac{AM}{BM} < k$. Значит, и в этом случае значение $\frac{AM}{BM}$ в точке N не является ни наибольшим, ни наименьшим.

Следовательно, наибольшее и наименьшее значение $\frac{AM}{BM}$ достигается тогда и только тогда, когда при движении точки M по прямой m и её «переходе» через точку N разность $\frac{AM}{BM} - k$ не меняет своего знака. Значит, это происходит в точках касания прямой m с окружностями Аполлония. Так как окружность Аполлония ортогональна окружности, проходящей через точки A и B, то прямая m в этих случаях проходит через центр C окружности, содержащей точки A и B (например, в точке N_1 рассматриваемое отношение — наибольшее, а в точке N_2 — наименьшее, см. рис. 11в).

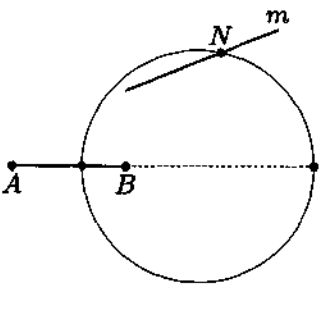


Рис. 11б

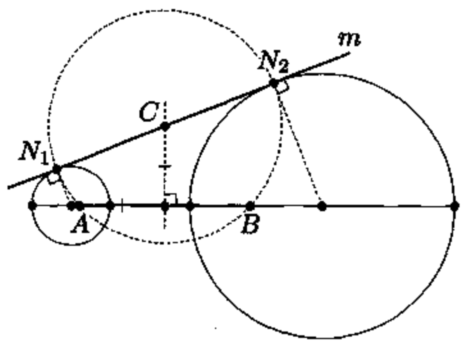


Рис. 11в

Таким образом, решение задачи сводится к построению серединного перпендикуляра n к отрезку AB, пересечением которого с прямой m является точка C. Точки пересечения окружности с центром C и радиусом CA с прямой m являются искомыми.

Существует также много примеров использования окружностей Аполлония в задачах, связанных с преследованием одного объекта другим. Рассмотрим одну из них.

Задача 3. Флибустьеры с острова Ямайка узнали, что на якоре перед Пуэрто-Белью стоит испанский галеон, гружёный золотом. Как только закончится шторм, галеон выйдет в Карибское море и возьмёт курс на пролив между островами Гаити и Пуэрто-Рико (см. рис. 12а). Флибустьеры также ждут конца шторма, поэтому выйти из Кингстона они могут только одновременно с испанцами. Какой курс следует выбрать флибустьерам, чтобы наверняка перехватить испанцев?

Решение. Если флибустьеры точно знают, во сколько раз скорость их корабля больше скорости галеона, то они могут найти все точки, в которые их корабль и галеон могут попасть одновременно. Действительно, пусть отношение скоростей равно k, тогда и отношение расстояний, пройденных кораблями до встречи, также равно k. Следовательно, все возможные точки встречи лежат на ГМТ M таких, что $\frac{AM}{BM} = k$, где точки A и B соответствуют Кингстону и Пуэрто-Бельо. Начертив на карте соответствующую окружность Аполлония, флибустьеры найдут, что курс галеона пересекает её в двух точках (см. рис. 12а). Поэтому, взяв курс на любую из них, они наверняка встретятся с испанцами, если, конечно, тех не перехватят другие пираты. Исходя из последнего, флибустьерам имеет смысл предпочесть ту из двух точек, которая ближе к Пуэрто-Бельо.

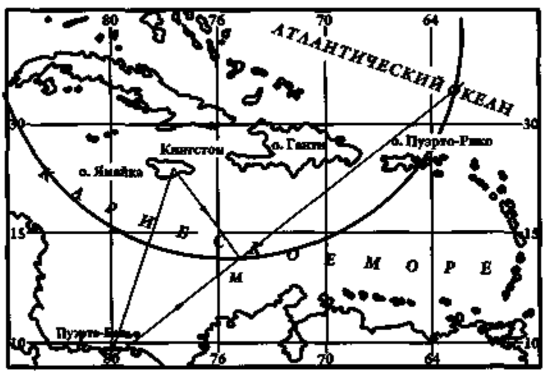


Рис. 12а

Если же флибустьеры точно не знают, каково отношение скоростей, то, используя решение задачи 2, можно построить такую точку курса галеона, в которой отношение $\frac{AM}{BM}$ принимает наименьшее значение (см. рис. 12б). В этой точке они могут организовать засаду — встать на якорь и ждать прибытия галеона.

Во всяком случае, если они не перехватят галеон в этой точке, то в другой точке они его и подавно не перехватят!

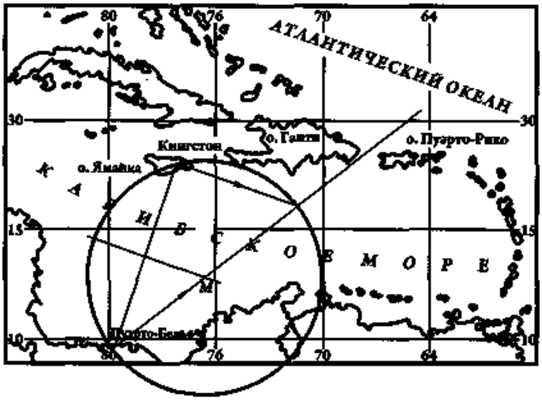


Рис. 12б

Другие примеры задач на применение окружности Аполлония, связанные с преследованием, — см. [21].

5. О построениях одним циркулем

Понятно, что только с помощью циркуля нельзя построить прямую. Поэтому, когда речь идет о построениях одним циркулем, договорились, что прямая считается построенной, если построены две её точки. Как уже было упомянуто (см. занятие 9), при такой договорённости **с помощью одного циркуля можно выполнить все построения, которые можно выполнить с помощью циркуля и линейки**. Это замечательное открытие сделал итальянский математик Лоренцо Маскерони (1750–1800), хотя позднее была обнаружена книга Г. Мора, изданная в 1672 году, в которой содержится полное решение проблемы Маскерони. При этом способы доказательства Мора и Маскерони принципиально отличаются (подробнее см., например, [9]).

Так как любое построение циркулем и линейкой представляет собой последовательное нахождение точек пересечения окружностей и прямых, то для доказательства основного утверждения достаточно доказать, что одним циркулем можно построить: 1) точки пересечения прямой, заданной двумя точками, с окружностью; 2) точку пересечения двух прямых. Рассмотрим пример задачи на построение одним циркулем.

Эти доказательства основаны на возможности построения образа произвольной точки при **инверсии** с помощью только **одного циркуля**. Рассмотрим эту базовую задачу.

Задача. Постройте образ точки A при инверсии относительно данной окружности ω.

Решение. Пусть окружность инверсии ω имеет центр O и радиус R. Рассмотрим сначала случай, когда точка A лежит вне окружности ω (см. рис. 13). Пусть B и C — точки пересечения ω и окружности радиуса AO с центром A. Проведём окружности с центрами B и C радиуса R. Эти окружности пройдут через точку O (так как $R = BO = CO$) и имеют вторую точку пересечения — A'. Докажем, что точка A' — искомая.

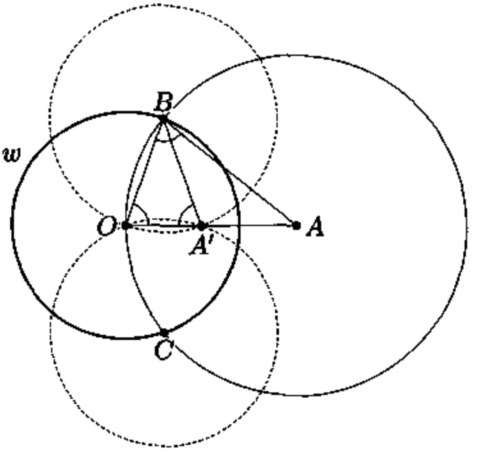


Рис. 13

Действительно, проведённые окружности с центрами B и C симметричны друг другу относительно прямой OA, значит, точка A' — неподвижная точка этой осевой симметрии. Следовательно, точка A' лежит на прямой OA. Кроме того, из подобия равнобедренных треугольников OAB и OBA' с общим углом AOB при основаниях, получим, что $\frac{OA}{OB} = \frac{OB}{OA'}$, то есть $OA \cdot OA' = R^2$, что и требовалось.

Пусть теперь точка A лежит внутри окружности ω. Будем последовательно откладывать на луче OA отрезки, равные OA: $AA_1 = A_1A_2 = \ldots = A_{n-1}A_n = OA$ до тех пор, пока точка A_n не окажется вне окружности ω (это можно сделать, используя только циркуль, см. задачу 69). Применив к этой точке A_n описанное выше построение, получим точку A'_n такую, что $OA'_n = \frac{R^2}{n \cdot OA} = \frac{OA'}{n}$. Тогда для построения искомой точки A' останется только в n раз увеличить отрезок OA'_n.

Сформулированные задачи на построение с помощью циркуля точек пересечения прямой и окружности и двух прямых решаются на основании рассмотренного построения. Подробнее об этом и о других задачах на построение одним циркулем — см., например, [9] или [16].

6. Построения, связанные с полярой точки относительно окружности

Решение ряда сложных задач на построение (в частности, на построение одной линейкой), связано с понятием **поляры точки относительно окружности**.

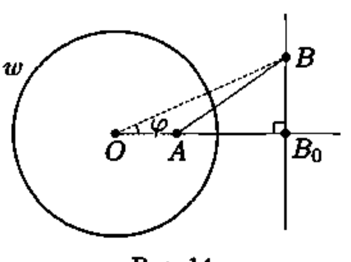


Рис. 14

Пусть дана окружность ω с центром O и радиусом R. **Точки A и B называются сопряжёнными относительно этой окружности, если $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = R^2$.** Для любой точки A, отличной от O, это равенство можно записать так:

$OB \cdot \cos\varphi = \dfrac{R^2}{OA} = OB_0$, где OB и $\varphi = \angle AOB$ — переменные, а B_0 — фиксированная точка луча OA (см. рис. 14). Так как угол φ острый, то точка B_0 является ортогональной проекцией любой точки B, сопряжённой с точкой A относительно ω. Множеством всех таких точек плоскости является прямая BB_0, перпендикулярная прямой OA. Эта прямая называется **полярой точки A относительно данной окружности ω**, а сама точка A называется **полюсом этой прямой.**

Попутно отметим, что точка B_0 — образ точки A при инверсии относительно окружности ω.

Отметим также (без доказательств) несколько **свойств поляры и полюса**, которые нам потребуются ниже.

1) Полярой точки A, лежащей на окружности ω, относительно этой окружности является касательная к ω, проходящая через точку A.

2) Если точка B лежит на поляре точки A, то точка A лежит на поляре точки B (свойство взаимности поляр).

Подробнее о свойствах **поляры** и **полюса**, а также о **полярном соответствии** точек плоскости и **принципе двойственности** — см., например, [8], [9] или [14].

Остановимся на утверждении, которое даёт наиболее простой способ построения поляры. **Если точка P лежит вне окружности $\omega(O; R)$, то её поляра содержит общую хорду окружности ω и окружности с диаметром OP.**

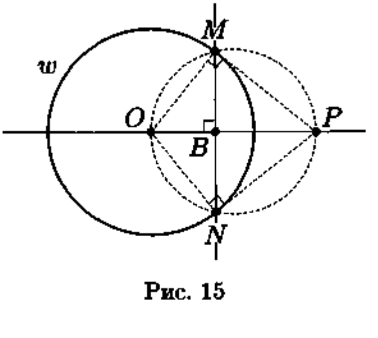


Рис. 15

Действительно, пусть MN — общая хорда этих окружностей, B — точка пересечения прямых MN и OP (см. рис. 15). Тогда углы PMO и PNO прямые (так как они вписаны в окружность и опираются на её диаметр), следовательно, PM и PN — касательные к окружности ω. Из прямоугольного треугольника PMO

получим, что $OP \cdot OB = MO^2 = R^2$, то есть прямая MN совпадает с полярой точки P относительно ω.

Поляру точки, лежащей вне окружности ω, можно построить также и с помощью одной линейки. Это построение основано на следующем факте: **точка Q пересечения диагоналей вписанного четырёхугольника $ABCD$ принадлежит поляре MN точки P пересечения прямых, содержащих его противоположные стороны BC и AD** (см. рис. 16). Его доказательство, основанное на применении **теоремы Чевы в тригонометрической форме**, можно найти, например, в [14] или в [16].

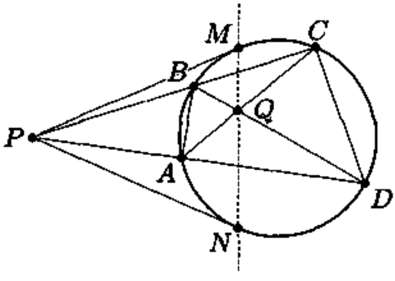


Рис. 16

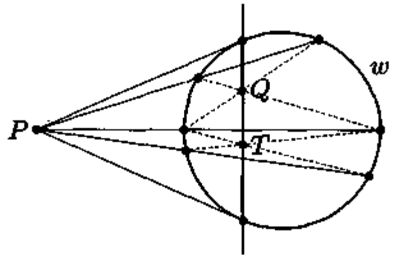


Рис. 17

Построение поляры точки P можно провести следующим образом: через точку P проводятся три произвольные секущие к окружности ω (см. рис. 17). Тогда прямая, проходящая через точки Q и T пересечения диагоналей полученных вписанных четырёхугольников, является полярой точки P относительно ω.

Отметим, что если точка P лежит внутри окружности, то вместо секущих через точку проводятся хорды, а искомую поляру получают, соединяя точки пересечения противоположных сторон двух вписанных четырёхугольников.

В качестве иллюстрации рассмотрим следующую задачу, которая уже упоминалась при разборе задачи 6 занятия 9.

Задача. Дана окружность и её диаметр AB. С помощью одной линейки постройте перпендикуляр к AB из точки P, лежащей на окружности.

Решение. Предположим, что искомый перпендикуляр построен. Пусть M — точка пересечения прямой AB и касательной к окружности в точке P. Тогда искомый перпендикуляр является полярой точки M относительно данной окружности (см. рис. 18).

Следовательно, решение задачи сведётся к построению точки M, что, в свою очередь, равносильно построению касательной к окружности в точке P, которая является полярой точки P относительно окружности. Рассмотрим точку K пересечения касательных к окружности в точках P и A, то есть полюс прямой AP. По **свойству взаимности поляр** полюс прямой AP будет являться пересечением поляр двух точек, лежащих на отрезке AP.

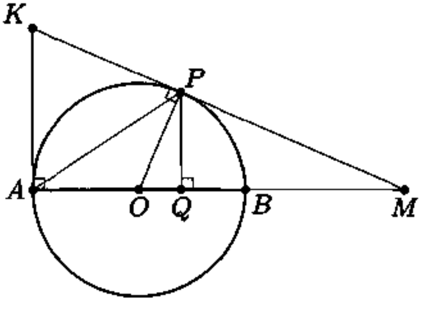


Рис. 18

Таким образом, искомое построение можно осуществить так:

1) провести отрезок AP;

2) построить поляры двух произвольных точек, лежащих на отрезке AP;

3) K — точка пересечения построенных поляр;

4) M — точка пересечения PK и AB;

5) построить поляру точки M.

Раздаточный материал

Занятие 1

Задача 1. Объясните, как построить углы, имеющие величину: а) $45°$; б) $60°$; в) $30°$.

Задача 2. Объясните, как построить равнобедренный треугольник по углу при вершине и биссектрисе, проведённой к боковой стороне.

Задача 3. Объясните, как построить треугольник по следующим данным:

а) стороне и проведённым к ней медиане и высоте;

б) двум углам и высоте (рассмотрите два случая);

в) двум сторонам и медиане (рассмотрите два случая);

г) стороне, прилежащему к ней углу и сумме двух других сторон.

Задача 4. Объясните, как построить прямоугольный треугольник, если даны его острый угол и разность гипотенузы и катета.

Занятие 2

Задача 1. Объясните, как построить следующие ГМТ:

а) удалённых от данной прямой на заданное расстояние;

б) из которых данный отрезок виден под заданным углом (рассмотрите три случая: заданный угол — прямой, острый и тупой).

Задача 2. Объясните, как построить касательную к окружности, проходящую через заданную точку (рассмотрите два случая).

Задача 3. Объясните, как построить треугольник по стороне, проведённой к ней медиане и радиусу описанной окружности.

Задача 4. Объясните, как построить окружность, которая касается данной прямой m в данной точке B и проходит через данную точку A, не лежащую на прямой m.

Задача 5. Даны три точки A, B и C. Объясните, как построить три окружности, попарно касающиеся в этих точках.

Задача 6. Даны окружность и прямая m, её не пересекающая. Объясните, как построить окружность, которая касается данной окружности и данной прямой в заданной точке Q, принадлежащей этой прямой.

Задача 7. Объясните, как построить прямую, проходящую через заданную точку M так, чтобы она отсекала от данного угла треугольник с заданным периметром.

Занятие 3

Задача 1. Постройте ромб по стороне и радиусу вписанной окружности.

Задача 2. Постройте прямоугольник по диагонали и периметру.

Задача 3. Постройте треугольник по двум высотам и медиане, если все они проведены из разных вершин.

Задача 4. Постройте треугольник ABC, зная положение центров трёх его вневписанных окружностей.

(Напомним, что вневписанной называется окружность, касающаяся стороны треугольника и продолжений двух других сторон.)

Задача 5. Постройте треугольник, если даны точки пересечения описанной около этого треугольника окружности с продолжениями медианы, биссектрисы и высоты, проведёнными из одной вершины.

Задача 6. Восстановите треугольник по основаниям его высот.

Задача 7. Постройте параллелограмм $ABCD$, если на плоскости отмечены три точки: середины его высот BH и BP и середина M стороны AD.

Занятие 4

Задача 1. Даны отрезки длины a, b и c. Постройте отрезок длины x, если $\dfrac{x}{a} = \dfrac{b}{c}$.

Задача 2. Дан отрезок длины 1. Постройте отрезки длины:

а) $x = \sqrt{13}$;

б) $y = \sqrt{3\sqrt{5}}$;

в) $z = \dfrac{2}{\sqrt{10} - 2}$.

Задача 3. Постройте угол, синус которого равен $\dfrac{\sqrt[4]{7}}{\sqrt{6}}$.

Задача 4. Постройте правильный пятиугольник с заданной стороной a.

Задача 5. Постройте окружности с центрами в трёх данных точках, попарно касающиеся внешним образом.

Задача 6. Постройте треугольник по двум сторонам и биссектрисе, проведённой к третьей стороне.

Задача 7. Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе и биссектрисе, проведённой к одному из катетов.

Занятие 5

Задача 1. Постройте параллелограмм $ABCD$ по двум заданным вершинам A и B, если две другие его вершины принадлежат данной окружности.

Задача 2. Постройте ромб с центром в данной точке и тремя вершинами, лежащими на трёх заданных прямых.

Задача 3. Постройте квадрат с центром в данной точке так, чтобы середины двух его соседних сторон принадлежали двум заданным прямым.

Задача 4. Постройте равносторонний треугольник с вершиной в данной точке так, чтобы две другие вершины принадлежали данной прямой и данной окружности.

Задача 5. Постройте равносторонний треугольник с центром в данной точке так, чтобы две его вершины принадлежали двум заданным фигурам.

Задача 6. Постройте треугольник ABC, если даны прямая, на которой лежит сторона AB, и серединные перпендикуляры к сторонам AC и BC.

Занятие 6

Задача 1. Постройте трапецию:

а) по основаниям и диагоналям;

б) по основаниям и боковым сторонам.

Задача 2. Даны две непересекающиеся окружности. Постройте их общую касательную:

а) внешнюю;

б) внутреннюю.

Задача 3. Постройте выпуклый четырёхугольник по двум противолежащим сторонам и трём углам.

Задача 4. Постройте выпуклый четырёхугольник $ABCD$, у которого диагональ AC принадлежит биссектрисе угла A, если даны все стороны четырёхугольника.

Задача 5. Постройте треугольник по стороне, проведённой к ней высоте и разности углов, прилежащих к данной стороне.

Задача 6. Постройте треугольник по медианам, проведённым к двум сторонам, и углу, противолежащему третьей стороне.

Занятие 7

Задача 1. Постройте прямоугольный треугольник по отношению катетов и гипотенузе.

Задача 2. Постройте треугольник по отношению трёх сторон и радиусу вписанной окружности.

Задача 3. Постройте параллелограмм по отношению диагоналей, углу между ними и высоте.

Задача 4. Постройте ромб, если даны радиус вписанной в него окружности и отношение стороны и диагонали.

Задача 5. Постройте трапецию по отношению оснований, высоте и углам, прилежащим к большему основанию.

Задача 6. На стороне BC данного треугольника ABC постройте такую точку M, что прямая, проходящая через основания перпендикуляров, опущенных из точки M на стороны AB и AC, параллельна BC.

Задача 7. Даны угол и точка внутри него. Постройте окружность, проходящую через заданную точку и касающуюся сторон угла.

Занятие 8

Задача 1. Дана прямая m и точки A и B, лежащие относительно неё в разных полуплоскостях. Постройте точку M на прямой m так, чтобы лучи MA и MB образовали с ней равные углы.

Задача 2. Дан острый угол AOB и точка M внутри него. На сторонах угла постройте точки X и Y так, чтобы периметр треугольника MXY был наименьшим.

Задача 3. Дана прямая m и точки A и B, лежащие в одной полуплоскости относительно m. Постройте на прямой m отрезок CD заданной длины так, чтобы углы ACD и BDC были равны и отрезки AC и BD не пересекались.

Задача 4. Населённые пункты A и B разделены двумя непараллельными друг другу каналами (у каждого канала два берега параллельны). Где нужно построить мосты, перпендикулярные берегам, чтобы длина пути из одного пункта в другой была наименьшей?

Задача 5. Через точку внутри угла проведите прямую так, чтобы отрезок, полученный внутри угла, делился данной точкой в заданном отношении.

Задача 6. Через общую точку двух окружностей проведите прямую так, чтобы эти окружности высекали на ней хорды, разность которых равна a.

Задача 7. Найдите какой-нибудь способ построения общих касательных к двум данным неравным окружностям, принципиально отличающийся от уже рассмотренного.

Занятие 9

Задача 1. Постройте прямую, проходящую через данную точку параллельно данной прямой, проведя как можно меньше линий.

Задача 2. Разделите угол величины 19° на 19 равных частей.

Задача 3. Постройте биссектрису угла, вершина которого «недоступна», с помощью только двусторонней линейки.

Задача 4. Постройте касательную к дуге окружности в данной её точке A, если центр окружности «недоступен».

Задача 5. Дан треугольник, одна из вершин которого «недоступна». Постройте точку пересечения медиан этого треугольника.

Задача 6. Дан круг и его диаметр AB.

а) С помощью одной линейки постройте перпендикуляр к прямой AB из точки P, лежащей внутри круга (но не лежащей на прямой AB).

б) Исследуйте возможность аналогичного построения при других случаях расположения точки P.

Задача 7. Дан угол C, вершина которого «недоступна», и точка K внутри угла.

а) Постройте прямую CK.

б)* Выполните это построение только одной линейкой.

Задача 8. На доске была нарисована окружность с отмеченным центром, вписанный в нее четырёхугольник и окружность, вписанная в него, также с отмеченным центром. Затем стёрли четырёхугольник (сохранив одну вершину) и вписанную окружность (сохранив её центр). Восстановите какую-нибудь из стёртых вершин четырёхугольника, пользуясь только линейкой и проведя как можно меньше линий.

Список литературы

1. А. Д. Александров, А. Л. Вернер, В. И. Рыжик. *Геометрия для 8–9 классов. Учебное пособие для учащихся школ и классов с углублённым изучением математики.* — М.: Просвещение, 1991.

2. И. И. Александров. *Сборник геометрических задач на построение.* — М.: УРСС, 2004.

3. Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев, Э. Г. Позняк, И. И. Юдина. *Геометрия. Учебник для 7–9 классов общеобразовательных учреждений.* — М.: Просвещение, 1995.

4. Ю. Билецкий, Г. Филипповский. *Чертежи на песке. В мире геометрии Архимеда.* — К.: Факт, 2000.

5. В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев, Э. Г. Позняк, С. А. Шестаков, И. И. Юдина. *Планиметрия. Пособие для углублённого изучения математики.* — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.

6. Р. К. Гордин. *Геометрия. Планиметрия. Задачник для 7–9 классов.* — М.: МЦНМО, 2004.

7. А. Кириллов. *О правильных многоугольниках, функции Эйлера и числах Ферма.* — Научно-популярный физико-математический журнал «Квант», №6, 1994.

8. Г. С. Коксетер, С. Л. Грейтцер. *Новые встречи с геометрией.* — М.: Наука, 1978.

9. Р. Курант, Г. Роббинс. *Что такое математика*? — М.: МЦНМО, 2007.

10. И. А. Кушнир. *Возвращение утраченной геометрии.* — Киев: Факт, 2000.

11. *Математика в задачах.* Сборник материалов выездных школ г. Москвы на Всероссийскую математическую олимпиаду/

Под. ред. А. А. Заславского, Д. А. Пермякова, А. Б. Скопенкова, М. Б. Скопенкова и А. В. Шаповалова. — М.: МЦНМО, 2009.

12. Ю. Михеев. *Одной линейкой.* — Научно-популярный физико-математический журнал «Квант», №10, 1980.

13. А. В. Погорелов. *Геометрия* 7–11. *Учебник для* 7–11 *классов.* — М.: Просвещение, 1995.

14. Я. П. Понарин. *Элементарная геометрия.* Т. 1. — М.: МЦНМО, 2004.

15. В. В. Прасолов. *Геометрические задачи Древнего мира.* — М.: Фазис, 1997.

16. В. В. Прасолов. *Задачи по планиметрии: в 2 ч.* — М.: Наука, 1995.

17. В. Ю. Протасов. *Максимумы и минимумы в геометрии.* — М.: МЦНМО, 2005.

18. Г. Б. Филипповский. *Авторская школьная геометрия. Часть* 1. — Киев: Библиотека Русановского лицея (*ротапринт*).

19. И. Ф. Шарыгин. *Геометрия.* 7–9 *кл.*: *Учебник для общеобразовательных учебных заведений.* — М.: Дрофа, 2000.

20. И. Ф. Шарыгин, Р. К. Гордин. *Сборник задач по геометрии.* 5000 *задач с ответами.* — М.: Астрель, 2001.

21. Г. Штейнгауз. *Математический калейдоскоп.* — Библиотечка «Кванта», вып. 8, 1981.

22. *Энциклопедический словарь юного математика.* /Сост. А. П. Савин/ — М.: Педагогика, 1985.

Список веб-ресурсов

1. `http://problems.ru/` — база задач по математике.

2. `http://geometry.ru/olimp.htm` — всероссийская олимпиада по геометрии имени И. Ф. Шарыгина.

3. `http://olympiads.mccme.ru/ustn/` — устные геометрические олимпиады.

Оглавление

ISBN 978-5-4439-0025-4
9 785443 900254 >